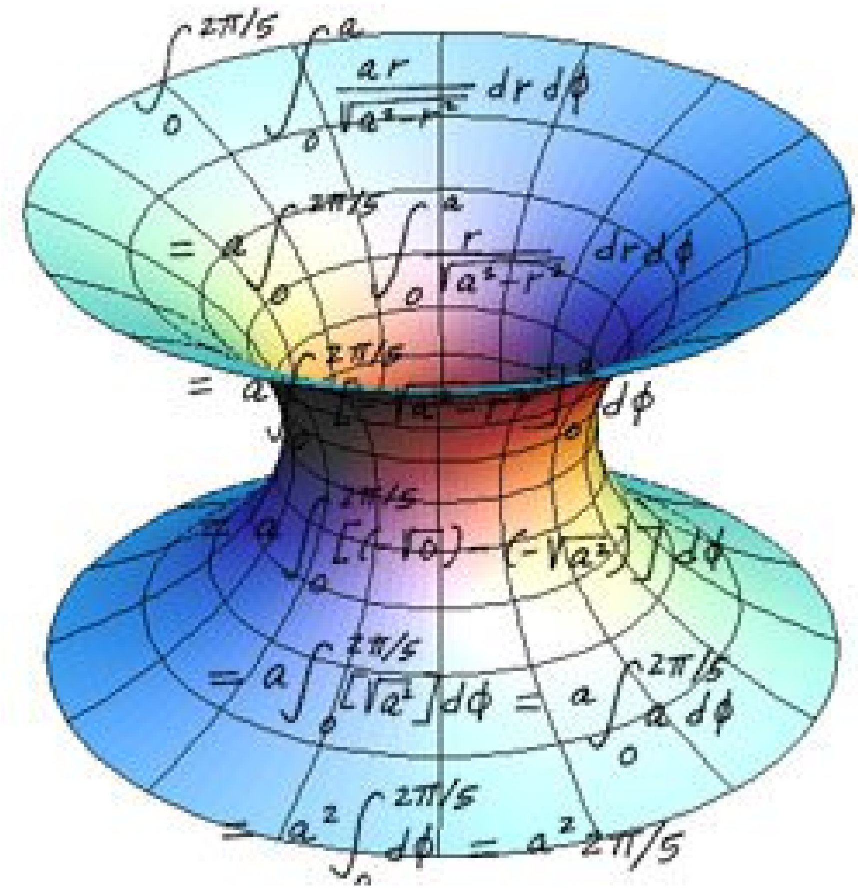
UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

Funciones de Varias Variables



Lic. Robert Ipanaqué Chero.

Lic.Néstor Javier Farías Morcillo

Lic. Segundo Basilio Correa Erazo MSc.

Prologo

Piura, Setiembre 2014

Índice general

1. Funciones de Varias Variables

1.1 Funciones de Varias Variables

¿Porqué es importante?

Una función es una regla de correspondencia que asigna a cada punto de $\mathbb{R}^n$ un único valor en $\mathbb{R}$, considere el siguiente ejemplo:

Una empresa que fabrica muebles dispone de 80 horas para tapicería y 90 horas para fabricación, el primer mueble necesita 3 horas para fabricarlo y de 1 hora para tapizarlo, mientras que el segundo requiere 2.5 horas para fabricarlo y 2 horas para tapizarlo. Si la empresa decide vender cada mueble del primer tipo en $s/500$ y cada mueble del segundo tipo en $s/600$. Se pide determinar la cantidad de muebles del $1er$ y $2do$ tipo que se debe fabricar para optimizar la ganancia.

Solución:

Para poder obtener una solución al problema anterior es necesario modelar el problema mediante una función que dependa de las unidades fabricadas del primer x y segundo tipo de mueble y. Es decir se desea maximizar :

$$Max(x,y) = 500x + 600y.$$

sujeto a las condiciones

$$\begin{aligned} 3x + 2{,}5y &\leq 90 \\ 1x + 2y &\leq 80 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Se consideran ejemplos de funciones multivariables las siguientes:

1. $F(x,y) = \dfrac{x^2+y}{2x}$
2. $F(r,h) = \pi r^2 h$
3. $F(x,y,z) = 50e^x - 3y + z$
4. $P(F,A) = \dfrac{F}{A}$
5. $G(x,y,z) = \sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$

1.1.1 Dominio de una función Multivariable

Sea $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función multivariable, el dominio de dicha función será un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y para determinarlo se realiza las respectivas restricciones.

■ **Ejemplo 1.1** Determinar el dominio de : $F(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

Solución:

$$\begin{aligned} 4-x^2-y^2 &\geq 0 \\ x^2+y^2-4 &\leq 0 \\ x^2+y^2 &\geq 4 \end{aligned}$$

Dominio $(f) = \left\{(x,y)\,\varepsilon\mathbb{R}^2/x^2+y^2 \geq 4\right\}$

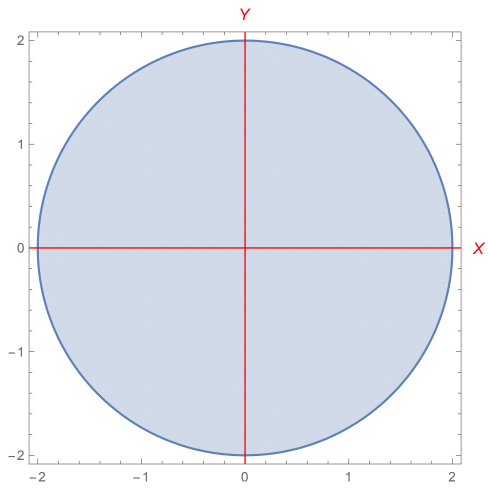


Figura 1.1: Dominio de $F(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

■

■ **Ejemplo 1.2** Determinar el dominio y graficar: $G(t,r) = \sqrt{4-r} + \sqrt{t-3}$

Solución:

$$4 - r \geq 0 \quad \wedge \quad t - 3 \geq 0$$
$$r - 4 \leq 0 \quad \wedge \quad t \geq 3$$
$$r \leq 4 \quad \wedge \quad t \geq 3$$

$$DomG = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \diagup r \leq 4 \wedge t \geq 3\}$$

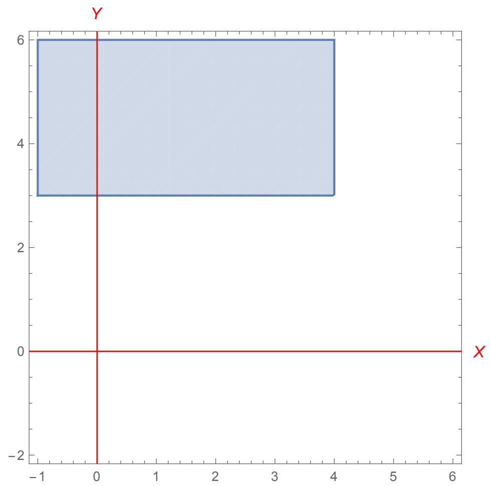


Figura 1.2: Dominio de $G(t,r) = \sqrt{4-r} + \sqrt{t-3}$

■

■ **Ejemplo 1.3** Determine el dominio y grafique: $\phi(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2 - 1}}{ln(2-y)}$

Solución:

$$y - x^2 - 1 \geq 0 \qquad \wedge \qquad ln(2-y) \neq 0$$
$$y \geq x^2 + 1 \quad \wedge 2 - y > 0, y \neq 1$$
$$y < 2, y \neq 1$$

$$Dom(\phi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup y \geq x^2 + 1, y < 2; y \neq 1\}$$

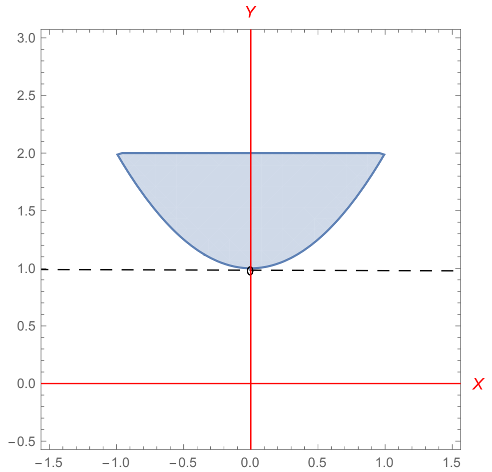


Figura 1.3: Dominio de $\phi(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2-1}}{ln(2-y)}$

■

N 1.1 Dada una función $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, la gráfica de dicha función descansa en el espacio $\mathbb{R}^{n-1}$, sólo podemos visualizar las gráficas de las funciones que están definidas en $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Simbólicamente podemos escribir a una función de dos variables de la forma $Z = F(x,y)$ y para graficarlo utilizamos el método de las curvas de nivel que consiste en asignar valores en la variable Z según esa la estructura de la función.

Definición 1.1.1 — Definition name. Sea $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, una función de dos variables definidas por: $z = F(x,y)$ llamamos curvas de nivel a la expresión que descansa en el plano, definida de la forma:$F(x,y) = k \;\; ,k \in \mathbb{R}$.:

■ **Ejemplo 1.4** **Graficar**: $F(x,y) = 2-2y$, $Z = 2-2y$

Solución:

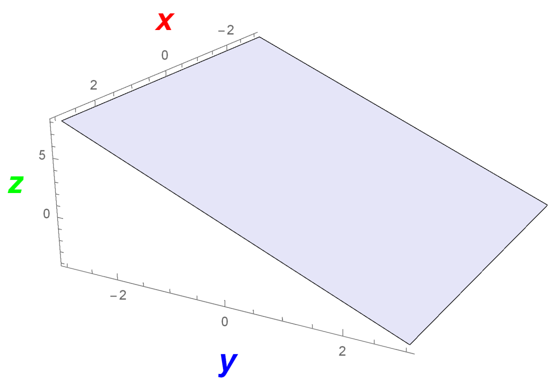


Figura 1.4: Gráfica $F(x,y) = 2-2y$

■

■ **Ejemplo 1.5** **Graficar**: $F(x,y) = 4$

Solución: cuando F es constante no hay curvas de nivel

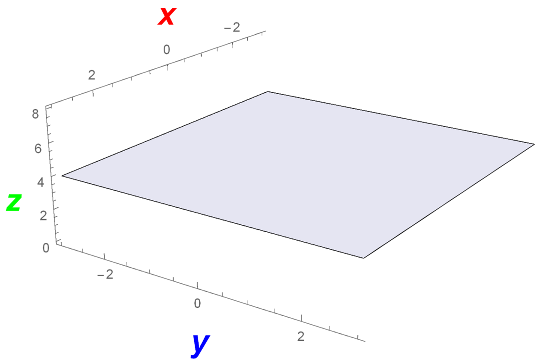


Figura 1.5: Gráfica $F(x,y) = 4$

■

■ **Ejemplo 1.6** **Graficar**: $F(x,y) = 2x+y-4$

Solución:

$Z = 2x+y-4$ Si $Z = -2 \Longrightarrow 2x+y-4 = -2 \Longrightarrow 2x+y = 2$ Si $Z = -1 \Longrightarrow 2x+y-4 = -1 \Longrightarrow$ $2x+y = 3$ Si $Z = 0 \Longrightarrow 2x+y-4 = 0 \Longrightarrow 2x+y = 4$ Si $Z = 1 \Longrightarrow 2x+y-4 = 1 \Longrightarrow 2x+y = 5$

■

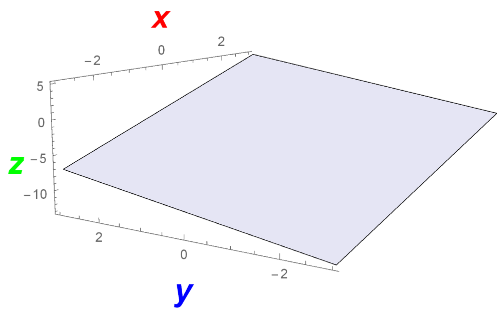


Figura 1.6: Gráfica $F(x,y) = 2x+y-4$

■ **Ejemplo 1.7** **Graficar**: $F(x,y) = y-x^2$

Solución:

$Z = y-x^2$ Si $Z = -2 \Longrightarrow y-x^2 = -2 \Longrightarrow y+2 = x^2$

Si $Z = -1 \Longrightarrow y-x^2 = -1 \Longrightarrow y+1-x^2$

Si $Z = 0 \Longrightarrow y-x^2 = 0 \Longrightarrow y = x^2$

Si $Z = 1 \Longrightarrow y - x^2 = 1 \Longrightarrow y - 1 = x^2$

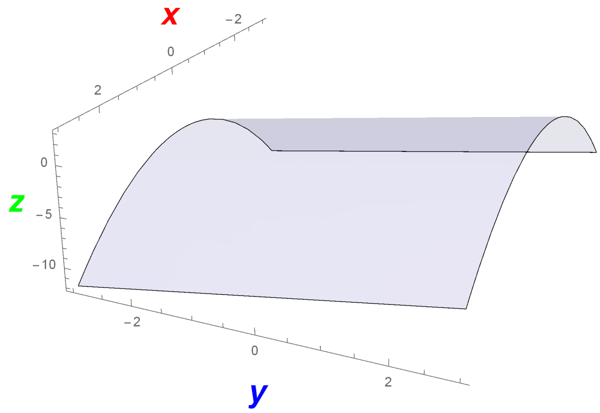


Figura 1.7: Gráfica $F(x,y) = y - x^2$

■

■ **Ejemplo 1.8** **Graficar:** $\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Solución:

$Z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Si $Z = 0 \Longrightarrow 16 - x^2 - y^2 = 0 \Longrightarrow 16 = x^2 + y^2$

Si $Z = 1 \Longrightarrow \sqrt{16 - x^2 - y^2} = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 15$

Si $Z = 2 \Longrightarrow \sqrt{16 - x^2 - y^2} = 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 12$

Si $Z = 4 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow P(0,0,4)$

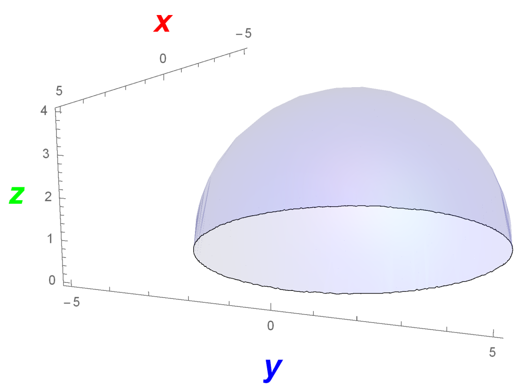


Figura 1.8: Gráfica $\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

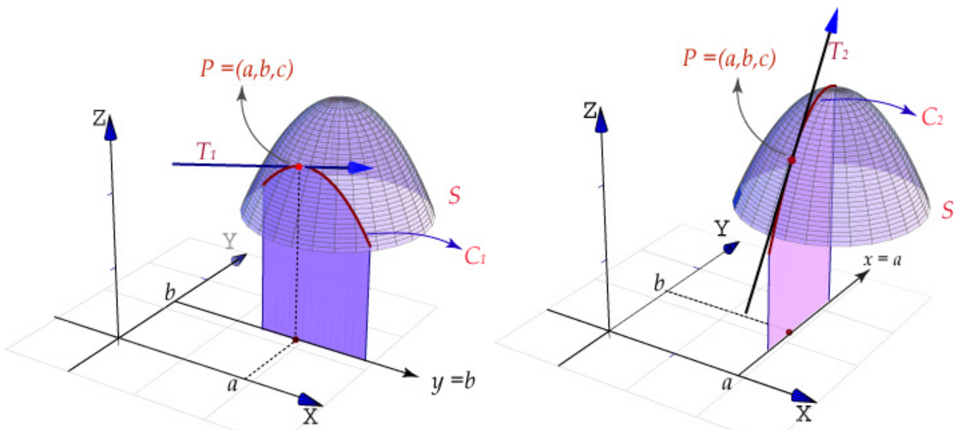
■

1.2 Derivada Parcial

Definición 1.2.1 Sea $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, las derivadas parciales con respecto a x e y en el punto $P(a,b)$ se denotan y definen de la siguiente manera:

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h,b)-F(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{F(a,b+h)-F(a,b)}{h}$$



(a) $\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial x}$ (b) $\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial y}$

Figura 1.9: Derivadas Parciales

■ **Ejemplo 1.9** Sea $F(x,y) = x^2y^2 - 2xy^2$. Halla $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$, en $P(2,1)$

Solución:

$$\frac{\partial F(2,1)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{F(2+h,1)-F(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = 2$$

$$\frac{\partial F(2,1)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{F(2,1+h)-F(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(1+h)^2-4(1+h)}{h} = \infty$$

■

N 1.2 Podemos derivar directamente sin necesidad de aplicar el limite y el procedimiento consiste en tratar a la variable y como constante cunado se nos pida derivar con respecto a x, y a la variable x como constante cuando se nos pida derivar con respecto a y.

Las reglas de derivación son las mismas que se utilizaron en el cálculo univariable.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2xy^2 - 2y^2 \\
\frac{\partial F(2,1)}{\partial x} &= 2 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2x^2y - 4xy \\
\frac{\partial F(2,1)}{\partial y} &= 0
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.10** Sea $\phi(r,s) = \sqrt{r^2+s^2} + \frac{r}{s}$. Calcular $\frac{\partial \phi}{\partial r}$, $\frac{\partial \phi}{\partial s}$, en $P(3,4)$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}} + \frac{1}{s} \\
\frac{\partial \phi(3,4)}{\partial x} &= \frac{3}{4} = \frac{27}{20} \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}} - \frac{1}{s^2} \\
\frac{\partial \phi(3,4)}{\partial y} &= \frac{4}{5} - \frac{1}{16} = \frac{49}{80}
\end{aligned}$$

■

Definición 1.2.2 Sea $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a la derivada total de F en el punto P de coordenadas (a,b) de la siguiente manera:

$$dF(a,b) = \frac{\partial F(a,b)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(a,b)}{\partial y}dy$$

Calculemos la derivada total de los ejemplos anteriores:

■ **Ejemplo 1.11** Para $F(x,y) = x^2y^2 - 2xy^2$ en $P(2,1)$

$$\frac{\partial F(2,1)}{\partial x} = 2, \ \frac{\partial F(2,1)}{\partial y} = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow dF(2,1) &= 2dx + 0dy \\
dF(2,1) &= 2dx
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.12** Para $\phi(r,s)=\sqrt{r^2+s^2}+\dfrac{r}{s}$ en $P(3,4)$

$$\frac{\partial\phi(3,4)}{\partial x}=\frac{27}{20},\ \frac{\partial\phi(3,4)}{\partial y}=\frac{49}{80}$$
$$\Longrightarrow d\phi(3,4)=\frac{27}{20}dr+\frac{49}{80}ds$$

■

La derivada total sirve para describir como de la variación en una función, cuando se comete errores en la medición de las variables independientes. Para mostrar esta aplicación trabajemos ejemplos concretos.

■ **Ejemplo 1.13** $F(x,y)=2x^3y^2-5x^2y+8y$, se nos pide medir $x=4, y=3$, sin embargo medirá $x=3\cdot999, y=3\cdot001$. Hallar aproximadamente la variación de F

Solución:

$$\begin{aligned} e &= F(3\cdot999,3\cdot001)-F(4,3)\\ e &= 935{,}951793-936\\ e &= -0{,}048207 \end{aligned}$$

Utilizando la derivada total:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6x^2y^2-10xy$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(4,3)}{\partial x} &= 6\cdot16\cdot9-10\cdot4\cdot3\\ \frac{\partial F(4,3)}{\partial x} &= 744 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4x^3y-5x^2+8$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(4,3)}{\partial y} &= 4\cdot64\cdot3-5\cdot16+8\\ \frac{\partial F(4,3)}{\partial y} &= 696\\ \text{reemplazando}\quad dF(4,3) &= 744dx+696dy, dx=-0\cdot001, dy=0\cdot001\\ dF(4,3) &= 744(-0\cdot001)+696(0\cdot001)=-0\cdot048 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.14** Calcular sin usar calculadora: $\sqrt{(2\cdot 999)^2+(4\cdot 002)^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2}; x=3, y=4; dx=-0\cdot 001, dy=0\cdot 002\\
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{3}{5}\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

La derivada total sería

$$\begin{aligned}
dF(3,4) &= \frac{3}{5}(-0\cdot 001)+\frac{4}{5}(0\cdot 002)\\
dF(3,4) &= 0\cdot 001
\end{aligned}$$

Comparando con la calculadora

$$\begin{aligned}
e &= F(x_e,y_e)-F(4,3)\\
e+F(x,y) &= F(x_e,y_e)\\
0\cdot 001+\sqrt{3^2+4^2} &= \sqrt{(2\cdot 999)^2+(4\cdot 002)^2}\\
5\cdot 001 &= 5\cdot 001004
\end{aligned}$$

Entonces

$$F(x_e,y_e)=F(x,y)+dp$$

■

■ **Ejemplo 1.15** Se desea construir un cilindro de dimensiones $r=3m, h=4m$, sin embargo en la medición de las dimensiones se obtuvieron $r=3\cdot 0005m, h=3\cdot 999m$

¿Cuál es el error cometido en la medición del volumen?

Solución:

$$dr=0\cdot 0005, dh=-0\cdot 01$$

$$V(r,h)=\pi hr^2, r=3m, h=4m$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(3,4)}{\partial r} &= 2\pi hr=24\pi\\
\frac{\partial V(3,4)}{\partial h} &= \pi r^2=9\pi
\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$e(3,4) = 24\pi(0\cdot 0005) + 9\pi(-0\cdot 01) = -0\cdot 245044227$$

En porcentaje , quedaría $e(3,4) = 0\cdot 245044227 * 100\,\% = 24\,\%$

El resultado anterior significa que el volumen del tanque que se ha construido está por debajo del volumen del tanque que se nos encargo, en porcentaje 24 % menos aproximadamente.

■

1.3 Integración Doble

Una integral doble es una herramienta matemática que en principio nace con la finalidad de calcular el volumen de un sólido. Los elementos que actúan en una integral doble son tres:

Una función bivariable(2 variables), una región de integración D y un elemento diferencial denominado diferencial de área el cual se representa mediante $dxdy$ ó $dydx$. La estructura de una integral doble es la siguiente: $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$.

■ **Ejemplo 1.16** Calcular $\int_0^2 \int_1^2 (x^2y + x)\,dxdy$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_1^2 (x^2y+x)\,dxdy &= \int_1^2 \left(\int_1^2 (x^2y+x)\,dx \right) dy \\
&= \int_1^2 \left(y\int_1^2 x^2dx + \int_1^2 x\,dx \right) dy \\
&= \int_1^2 \left[y\,\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_1^2 dy \\
&= \int_1^2 \left[y\,\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_1^2 dy
\end{aligned}$$

Reemplazando el límite superior e inferior

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_1^2 (x^2y+x)\,dxdy &= \int_1^2 \left[y\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \right] dy \\
&= \int_1^2 \left(\frac{7}{3}y + \frac{3}{2} \right) dy \\
&= \left[\frac{7}{3}\frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} \right] \Bigg|_1^2 = 5
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.17** Calcular $\int_0^2 \int_0^2 (8x^2+2y)\,dydx$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(8x^2 \int_0^2 dy + 2\int_0^2 ydy\right) dx &= \int_0^2 \left[8x^2 \left(y\right)|_0^2 + 2\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2\right] dx \\
&= \int_0^2 \left(16x^2+4\right) dx \\
&= 16\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 + 4\left(x\right)|_0^2 = \frac{152}{3}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.18** Calcular $\int_0^1 \int_1^x (xy)\,dydx$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(x\int_1^x ydy\right) dx &= \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]\Big|_1^x dx \\
&= \int_0^1 x\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

■

1.3.1 Volumen de un sólido

Para determinar el volumen de un sólido limitado por la gráfica de una función de dos variables se puede utilizar una integral doble (Ver Fig.1.10). Geométricamente se interpreta de la siguiente manera:

El punto $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, representa cualquier punto $ij-\acute{e}simo$ rectángulo. El volumen del $ij-\acute{e}simo$ paralelepípedo estaría dado por:

$$\Delta V_{ij} = f\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right) \Delta x_i \Delta y_i$$

Por tanto, si deseamos el volumen bajo la superficie, tendríamos que hacer una suma de volúmenes de una cantidad infinita de paralelepídedos, es decir:

$$V = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right) \Delta x_i \Delta y_i \tag{1.1}$$

De aquí surge la definición de integral doble: Sea f una función de dos variables definida en la

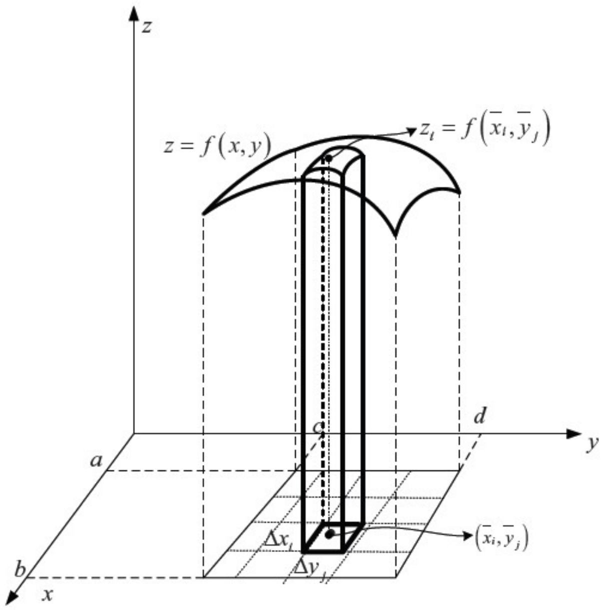


Figura 1.10: Volumen de un sólido

región plana:

$$D = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y)\,/a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$

A la ecuación (1.1) se le denomina la Integral Doble de f en D y se denota de la siguiente manera:

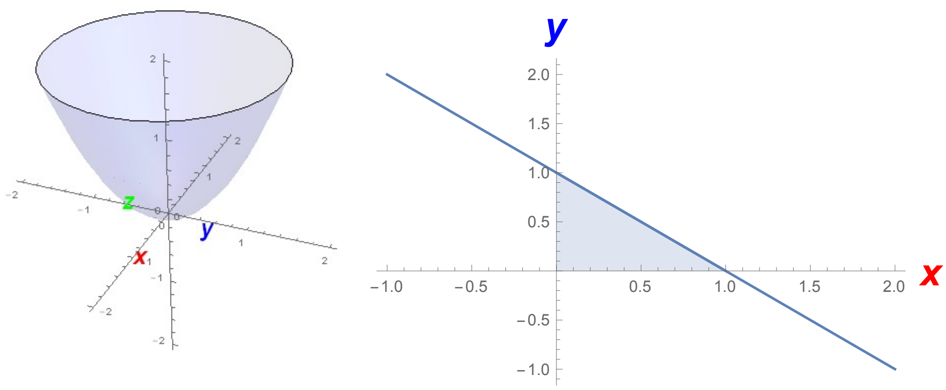
$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dA; \quad dA = dxdy$$

■ **Ejemplo 1.19** Determinar el volumen del sólido limitado superiormente por: $F(x,y) = x^2 + y^2$ e inferiormente por $D = \{x + y = 1; x = 0; y = 0\}$

Solución:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2 + y^2)\,dxdy \\ &= \int_0^1 \left[\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{1-y} + y^2\,x|_0^{1-y} \right] dy \\ V &= \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^3}{3} + y^2\,(1-y) \right] dy = \frac{1}{6}u^3 \end{aligned}$$

■



(a) Superficie (b) Región de integración D

Figura 1.11: Volumen bajo $z = x^2 + y^2$

■ **Ejemplo 1.20** Calcular $\displaystyle\iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right)\, dA$, donde D es la región limitada por: $y = x$,$x = 0$,$y = 1$ y $y = 2$

Solución: Tomando en cuanta la figura se observa que en el primer tramo x varía de 0 a 1,

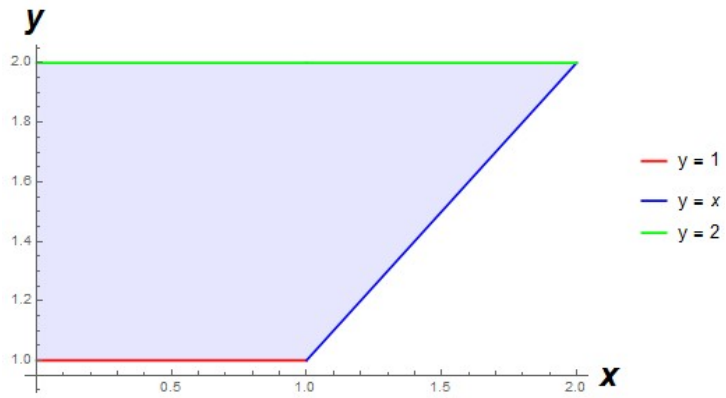


Figura 1.12: Región de integración

mientras que y de 1 a 2, luego x varía de 1 a y, manteniéndose y de 1 a 2, entonces nuestra integral doble será:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_0^1 (x^2+y^2)\,dxdy + \int_1^2 \int_1^y (x^2+y^2)\,dxdy \\
&= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + y^2\,x|_0^1 \right] dy + \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3}\Big|_1^y + y^2\,x|_1^y \right] dy \\
&= \int_1^2 \left[\frac{1}{3} + y^2 \right] dy + \int_1^2 \left[\left(\frac{y^3}{3} + y^3 \right) - \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) \right] dy \\
&= \int_1^2 \left[\frac{1}{3} + y^2 \right] dy + \int_1^2 \left[\left(\frac{y^3}{3} + y^3 \right) - \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) \right] dy \\
&= \int_1^2 \left[\frac{4y^3}{3} \right] dy = \frac{y^4}{3}\Big|_1^2 = 5
\end{aligned}
$$

■

1.3.2 Cálculo de Áreas

■ **Ejemplo 1.21** Calcular el área limitada por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta $y = x + 4$

Solución:

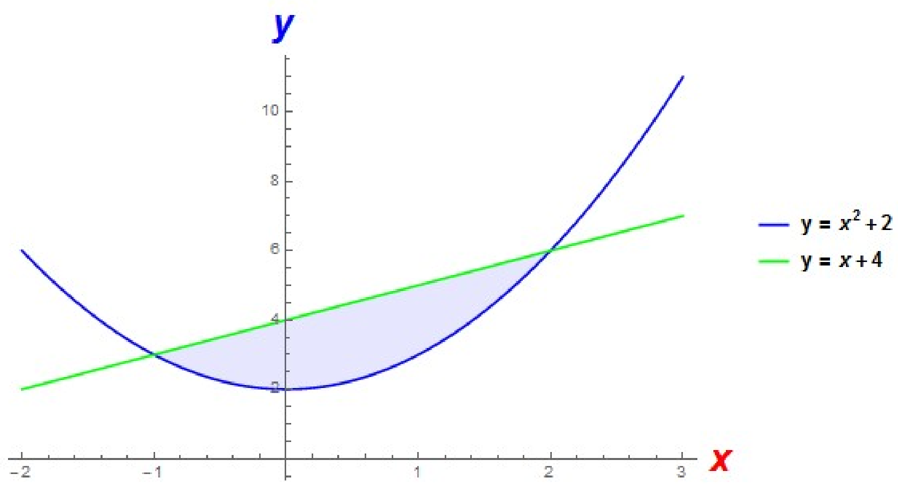


Figura 1.13: Área limitada por $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$

Hallamos los interceptos con el eje x:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2 &= x + 4 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
(x-2)(x+1) &= 0 \\
x = 2 \quad &\vee \quad x = -1
\end{aligned}
$$

Entonces x varía de -1 a 2 ;del gráfico se observa que y varía de la parábola $y = x^2 + 2$ a la recta $y = x + 4$. El área la hallaremos mediante:

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2+2}^{x+4} dydx &= \int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2+2}^{x+4} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^{2} (y)\Big|_{x^2+2}^{x+4} dx \\ &= \int_{-1}^{2} \left[x + 4 - x^2 - 2 \right] dx \\ &= \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} u^2 \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.22** Calcular el área limitada por: $y = x^2 - 9$, $y = 9 - x^2$

Solución:

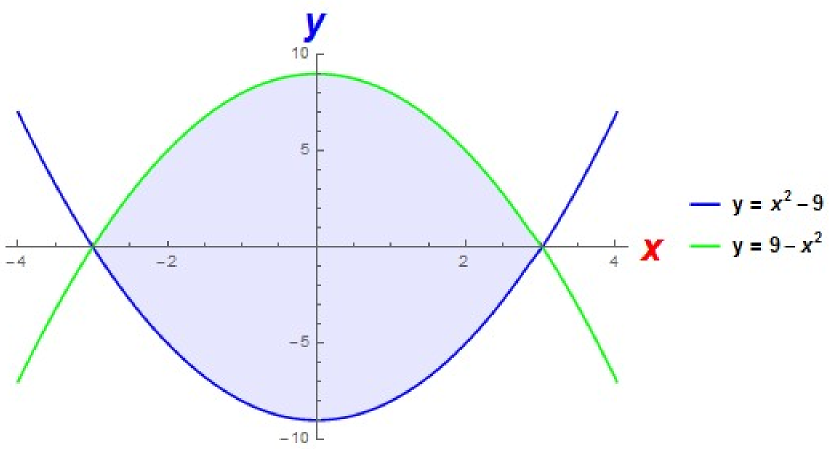


Figura 1.14: Área limitada por $y = x^2 - 9$, $y = 9 - x^2$

Hallamos los interceptos con el eje x:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 9 - x^2 \\ 2x^2 &= 18 \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

el área estará dada por:

$$\begin{aligned} A=\int_{-3}^{3}\int_{x^2-9}^{9-x^2} dydx &= \int_{-3}^{3}\left(\int_{x^2-9}^{9-x^2} dy\right)dx \\ &= \int_{-3}^{3} (y)|_{x^2-9}^{9-x^2} dx \\ &= \int_{-3}^{3} \left[18-2x^2\right] dx \\ &= \left(18x-2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} = 72u^2 \end{aligned}$$

■

1.3.3 Cambio de Variable en Integración Doble

Los intentos algebraicos para determinar la integral $\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{x^2}{2}}\, dx$ llevaron a los matemáticos de la época en realizar cambios de variables con la finalidad de convertirlas en una integral mucho más fácil de resolver por métodos algebraicos. Para abordar este punto antes definimos a un elemento muy importante denominado **JACOBIANO DE UNA TRANSFORMACIÓN**.

Definición 1.3.1 Si en una transformación realizamos el cambio de variable $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, entonces el JACOBIANO de dicha transformación se denota y se define de la siguiente manera:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

En base a la definición anterior diremos que:

$$\iint\limits_{D} F(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D^*} g(u,v)J(u,v)\, dudv$$

A continuación mostraremos ejemplos del uso adecuado del cambio de variable.

■ **Ejemplo 1.23** Determine $\int_{1}^{2}\int_{1}^{x}(x+y)\, dydx$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^x dx &= \int_1^2 \left[\left(x^2-x\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right] dx \\
&= \int_1^2 \left[\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)\right] dx \\
&= \left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.24** Calcular $\int_0^1 \int_1^{2u+1} (u+\frac{v}{2}+\frac{3}{2})\, dvdu$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(uv+\frac{v^2}{4}+\frac{3v}{2}\right)\Big|_1^{2u+1} du &= \int_0^1 \left[\left(u(2u+1)+\frac{(2u+1)^2}{4}+\frac{3(2u+1)}{2}\right)-\left(u+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)\right] du \\
&= \int_0^1 \left(3u^2+4u\right) du \\
&= \left(u^3+2u^2\right)\Big|_0^1 = 3
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.25** En la integral $\int_1^2 \int_1^x (x+y)\, dxdy$, haga el cambio de variable $u = x-1$, $v = 2y-1$ y calcula la integral en las nuevas variables.

Solución: La región es $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x\}$

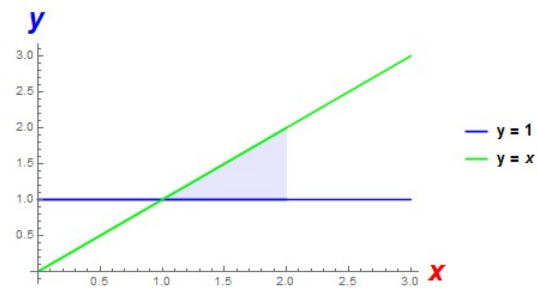
$$\begin{aligned}
x = 1 \rightarrow u = 0 \quad &, \quad x = 2 \rightarrow u = 1 \\
y = 1 \rightarrow v = 1 \quad &, \quad y = x \rightarrow v = 2x-1 \\
v = 2(u+1)-1 \quad &= \quad 2u+1 \qquad \text{Ver Fig.1.15}
\end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable tenemos

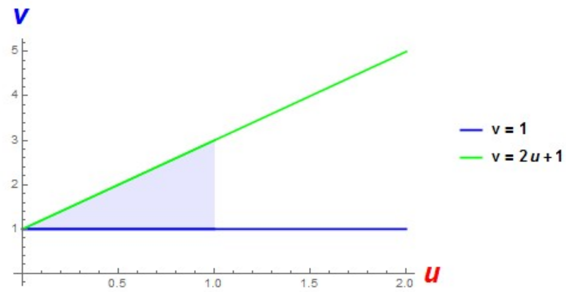
$$\int_1^2 \int_1^x (x+y)\, dxdy = \int_0^1 \int_1^{2u+1} \left(u+1+\frac{v+1}{2}\right) J(u,v)\, dvdu$$

Calculamos el jacobiano:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$



(a) Región inicial



(b) Nueva Región

Figura 1.15: Cambio de variable

Reemplazando

$$\begin{aligned}\int_1^2\int_1^x (x+y)\,dxdy &= \int_0^1\int_1^{2u+1}\left(u+\frac{v}{2}+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}\,dvdu \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_1^{2u+1}\left(u+\frac{v}{2}+\frac{3}{2}\right)dvdu = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.26** En la integral $\int_0^1\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy$, haga el cambio de variable $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y calcula la integral en las nuevas coordenadas.

Solución:

La región es $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq 0; y\geq 0\}$

$r\geq 0; 0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}; x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{vmatrix} = r$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\left[(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2\right]}.r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}.r\,drd\theta \\
&= \frac{-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\,(\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

■

Actividad N°01

Ejercicio 1.1 Determine el dominio y grafique:

1) $z = \dfrac{x}{\sqrt{2x-y+2}}$

2) $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$

3) $C(t,q) = \sqrt{5-t} - \sqrt{q-4}$

4) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{25x^2-y^2}}{x}$

5) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{Ln(1-x^2-y^2)}$

6) $\phi(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-y^2-1}}{ln(2-x)}$

7) $\phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-25}$

8) $Ln(36-4x^2-9y^2)$

9) $z = \dfrac{Ln(x-2y)}{\sqrt{y-2x}}$

10) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y^2-x}{x^2+y^2-25}}$

Ejercicio 1.2 Graficar:

1) $z = 2y - y^2$

2) $z = 2x - x^2$

3) $4y = \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{z^2}{25}$

4) $12z = 9x^2 + 4y^2$

5) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$

6) $y^2 = 2 - z$

7) $z = y - 3^2 + x + 2^2 + 9$

8) $4x = \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{25}$

9) $4z = x^2 + 2x$

10) $3x^2 - 6y^2 + 2z^2 = 6$

2. Ecuaciones diferenciales Ordinarias

2.1 Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación en donde intervienen una función univariable con una o más de sus derivadas. Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias las siguientes:

1. $m.\dfrac{dv}{dt} = F(t)$
2. $m.\dfrac{d^2x}{dt^2} = F(t)$
3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 4$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+4y}{x-3y}$
5. $m.\dfrac{d^2x}{dt^2} = +\beta\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$
6. $\dfrac{dP}{dt} = kP$
7. $\dfrac{dC}{dt} = kC$
8. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 5\dfrac{d^3y}{dx^3} + 8\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 - 1$

N 2.1 Recordemos que se llama ecuación diferencial ordinaria porque la función que interviene en dicha función es una función univariable, su solución será una función que depende de la variable independiente que intervenga en dicha ecuación.

2.1.1 Orden de una Ecuación Diferencial Ordinaria

El orden de una ecuación diferencial ordinaria esta dada por el orden de la derivada de mayor orden que intervenga en la ecuación.

Ejemplos

1. $m\dfrac{dv}{dt} = \sin(3t)$; 1^{er} orden
2. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2t$; 2^{er} orden
3. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = +\beta\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$; 2^{er} orden
4. $\dfrac{dP}{dt} = P(a - bP)$; 1^{er} orden

2.1.2 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Una **EDO** se clasifica de dos formas: Lineales y no lineales.

Diremos que una ecuación diferencial ordinaria es lineal cuando tanto la función como sus derivadas que intervengan estén elevados a un exponente uno; por el contrario será no lineal cuando por lo menos la función ó algunas de sus derivadas estén afectadas de exponentes diferente de uno.

También son consideradas no lineales aquellas **EDO**, la variable dependiente o algunas de sus derivadas aparecen afectadas de funciones trascendentes tales como: trigonométricas, logarítmicas, exponenciales.

Ejemplos

1. $\dfrac{dv}{dt} = k(t - 10)$; lineal
2. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - 0 \cdot 5P)$; no lineal
3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2 - 3$; lineal porque la variable dependiente y tiene exponente uno.

En lo sucesivo nos encargaremos de idear estrategias ó técnicas de solución para resolver una ecuación diferencial de primer orden. Estas técnicas que utilizaremos están basadas en integración simple.

2.2 Ecuación Diferencial Ordinaria de Variable Separable

Si se tiene por ejemplo la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y}{x + 3y}$; al hacer transformaciones algebraicas resulta:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 + y}{x + 3y} \\
(x + 3y)dy &= (x^2 + y)dx \\
-(x^2 + y)dx + (x + 3y)dy &= 0
\end{aligned}
$$

de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ La cual simbólicamente se puede representar de la siguiente forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; decimos que es de variable separable cuando después de realizar transformaciones algebraicas resulta:

$$u(x)dx+v(y)dy=0 \tag{2.1}$$

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias de variable separable las siguientes:

1. $x^2ydx+xdy=0 \Longrightarrow \frac{x^2}{x}dx+\frac{dy}{y}=0$
2. $\frac{dP}{dt}=P(3-4P) \Longrightarrow \frac{dP}{P(3-4P)}=dt$
3. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=4 \Longrightarrow xdy+ydx=4xdx \Longrightarrow (y-4x)dx+xdy=0$, no es de variable separable.

Una vez que se logra separar las variables simplemente se integra y se despeja la variable dependiente. Es decir si $u(x)dx+v(y)dy=0 \Longrightarrow \int u(x)dx+\int v(y)dy=k$

■ **Ejemplo 2.1** $\frac{dy}{dx}=\frac{A-2y}{x}$; A es constante.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{A-2y} &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dy}{A-2y} &= \int \frac{dx}{x} \\
\frac{-1}{2}ln(A-2y) &= ln(x)+k \\
ln(A-2y) &= -2ln(x)-2k \\
A-2y &= e^{-2\ln(x)-2k} \\
A-2y &= e^{ln(x^{-2})}.e^{-2k} \\
A-2y &= x^{-2}.k \\
A-kx^{-2} &= 2y \\
y &= \frac{A-kx^{-2}}{2}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.2** $\begin{cases} y'=3\sqrt[3]{y^2} \\ y(2)=0 \quad \text{problema de valor inicial} \end{cases}$

Solución:

$$\begin{aligned}
y' &= 3\sqrt[3]{y^2} \\
\frac{dy}{dx} &= 3\sqrt[3]{y^2}
\end{aligned}$$

Separando variables tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}} &= 3dx \\
\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}} &= 3\int dx \\
\int y^{\frac{-2}{3}} dy &= 3x+k
\end{aligned}$$

Integrando

$$3y^{\frac{1}{3}} = 3x+k \tag{2.2}$$

Reemplazando las condiciones iniciales $x=2$, $y=0$, tenemos $k=-6$; luego reemplazamos en la ecuación (2.2):

$$y = (x-2)^3$$

■

■ **Ejemplo 2.3** $y' = \dfrac{x}{y}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \\
ydy &= xdx \\
\int ydy &= \int xdx \\
\frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2}+k \\
y^2 &= x^2+2k \\
y &= \pm\sqrt{x^2+2k}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.4** $(x^2y+y)dx+xdy=0$

Solución:

$$\begin{aligned}
y(x^2+1)dx+xdy &= 0 \\
\left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx+\frac{dy}{y} &= 0
\end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned}
\int\left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx+\int\frac{dy}{y} &= 0\\
\frac{x^2}{2}+\ln(x)+\ln(y) &= k\\
\ln(y) &= k-\frac{x^2}{2}-\ln(x)
\end{aligned}$$

Ahora hacemos las operaciones para despejar y:

$$\begin{aligned}
y &= e^{k-\frac{x^2}{2}-\ln(x)}\\
&= e^k.e^{-\frac{x^2}{2}}.e^{-\ln(x)}\\
&= k.e^{-\frac{x^2}{2}}.e^{\ln(x^{-1})}\\
y &= k.e^{-\frac{x^2}{2}}.x^{-1}=\frac{k.e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}
\end{aligned}$$

■

2.3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Homogéneas

Definición 2.3.1 — Función Homogénea. Sea $M(x,y)$ una función que depende de dos variables, decimos que es homogénea si cumple:

$$M(kx,ky)=k^nM(x,y)$$

■ **Ejemplo 2.5** Sea $M(x,y)=x^2+xy$, determinar si es homogénea.

Reemplazamos $(x,y)=(kx,ky)$

$$\begin{aligned}
M(kx,ky) &= (kx)^2+(kx)(ky)\\
&= k^2x^2+k^2xy=k^2(x^2+xy)\\
M(kx,ky) &= k^2M(x,y)
\end{aligned}$$

■

Dada la ecuación diferencial: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, decimos que es **EDO** homogénea cuando tanto M como N son funciones homogéneas del mismo grado. Si hacemos el cambio de variable $y=ux$; $dy=udx+xdu$ se convierte en **EDO** de variable separable.

■ **Ejemplo 2.6** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x+y}{x-y} \\
(x-y)dy &= (x+y)dx \\
-(x+y)dx+(x-y)dy &= 0
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$y = ux; dy = udx + xdu$$

Reemplazamos

$$\begin{aligned}
-(x+xu)dx+(x-xu)(udx+xdu) &= 0 \\
-(1+u)dx+(1-u)(udx+xdu) &= 0 \\
-(1+u)dx+(1-u)udx+(1-u)(xdu) &= 0 \\
(-1-u+u-u^2)dx+x(1-u)du &= 0 \\
(-1-u^2)dx+x(1-u)du &= 0 \\
\frac{dx}{x}+\frac{1-u}{-1-u^2}du &= 0 \quad \text{integrando} \\
\int\frac{dx}{x}+\int\frac{u-1}{u^2+1}du &= 0 \\
ln(x)+\frac{1}{2}ln(u^2+1)-\arctan(u) &= k \\
ln(x)+\frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{x^2}+1)-\arctan(\frac{y}{x}) &= k
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.7** $x' = \frac{t-3x}{3t+x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{t-3x}{3t+x} \\
(3t+x)dx &= (t-3x)dt
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$x = ut; dx = udt + tdu$$

Ahora reemplazamos:

$$
\begin{aligned}
(3t+ut)(udt+tdu) &= (t-3ut)dt \\
(3+u)(udt+tdu) &= (1-3u)dt \\
3udt+3tdu+u^2dt+utdu &= dt-3udt \\
6udt+3tdu+u^2dt+utdu-dt &= 0 \\
(6u+u^2-1)dt+(3+u)tdu &= 0 \\
\frac{dt}{t}+\frac{3+u}{6u+u^2-1}du &= 0 \quad \text{operamos, luego integramos} \\
\int \frac{dt}{t} &= -\int \frac{3+u}{6u+u^2-1}du \\
\ln(t)+k &= \frac{-1}{2}\ln(6u+u^2-1) \\
6u+u^2-1 &= kt^{-2} \\
x^2+6xt-t^2 &= k \\
x^2+6xt-t^2-k &= 0 \quad \text{para despejar x utilizamos la fórmula general} \\
x &= \frac{-6t\pm\sqrt{40t^2+4k}}{2} \\
x &= -3t\pm\sqrt{10t^2+k}
\end{aligned}
$$

■

2.4 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Antes de definir a una ecuación diferencial exacta, en primer lugar recordemos una definición muy importante:

Definición 2.4.1 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, a la derivada total de f se le denota y se le define de la siguiente manera:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

Definición 2.4.2 Dada la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, diremos que es exacta cuando existe una función $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Es decir:

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \wedge \quad N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

N 2.2 Diremos que la Ecuación Diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta, cuando se cumpla que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Probar cuales de las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas.

■ **Ejemplo 2.8** $(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$

Solución: Sea $M(x,y) = 2xy + y^2 \quad \wedge \quad N(x,y) = x^2 + 2xy$, las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y$$

Entonces la Ecuación diferencial es exacta. ■

■ **Ejemplo 2.9** $\left(\frac{1}{\beta}\right) d\alpha - \left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right) d\beta = 0$

Solución:

Sea $M(\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta} \quad \wedge \quad N(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}$, las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial M(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta^2}$$

$$\frac{\partial N(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\beta^2}$$

Entonces la Ecuación diferencial es exacta. ■

2.4.1 Resolución de una Ecuación Diferencial Ordinaria Exacta

Para resolver una Ecuación diferencial ordinaria exacta, procedemos de la siguiente forma: $\exists F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Entonces

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= 0 \\ \int dF(x,y) &= k \\ F(x,y) &= k \quad \text{(solución general: } \mathbf{S.G}\text{)} \end{aligned}$$

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

■ **Ejemplo 2.10** $(2xy+y^2)dx+(x^2+2xy)dy=0$

Solución: La función que cumple con la ecuación es

$$F(x,y)=x^2+xy^2$$

Entonces **S.G:** $x^2y+xy^2=k$ ■

■ **Ejemplo 2.11** $\left(\dfrac{-s^2}{r^2\sqrt{r^2+s^2}}\right)dr+\left(\dfrac{s}{r\sqrt{r^2+s^2}}\right)ds=0$

Solución:

La función es: $F(r,s)=\dfrac{r+\sqrt{r^2+s^2}}{r}$ y la solución: **S.G:** $\dfrac{r+\sqrt{r^2+s^2}}{r}=k$ ■

■ **Ejemplo 2.12** $\left(\dfrac{1}{\beta}\right)d\alpha-\left(\dfrac{\alpha}{\beta^2}\right)d\beta=0$

Solución:

La función es : $F(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha}{\beta}$ Entonces la solución será: **S.G:** $\dfrac{\alpha}{\beta}=k$ ■

Para determinar la función f podemos seguir 2 caminos el primero será cuando utilizamos la expresión M y el segundo cuando se utiliza la expresión N.

Si utilizamos la expresión N, tendríamos que escribir: $\dfrac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$; $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$

Luego se integra usando las reglas de integración conocidas del calculo integral teniendo en cuenta que si se integra con respecto a x; y se comporta como constante y si se integra con respecto a y; x se comporta como constante.

■ **Ejemplo 2.13** Resolver $(2xy+y^2)dx+(x^2+2xy)dy=0$

Solución:

a) Primera forma

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2xy+y^2\\
dF &= (2xy+y^2)dx \quad \text{integrando a ambos lados:}\\
\int dF &= \int (2xy+y^2)dx\\
F(x,y) &= 2y\int xdx + y^2\int dx\\
F(x,y) &= x^2y+xy^2+g(y) \quad \text{ahora derivamos respecto a y}\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= x^2+2xy+g'(y)\\
\text{Comparando tenemos:} \quad x^2+2xy &= x^2+2xy+g'(y)\\
g'=0 &\rightarrow g(y)=c\\
F(x,y) &= x^2y+xy^2+c\\
\text{Como} \quad F(x,y)=k &\rightarrow \textbf{S.G:} \quad k=x^2y+xy^2
\end{aligned}$$

b Segunda forma

$$\begin{aligned}
Ahora: \frac{\partial F}{\partial y} &= (x^2+2xy)\\
dF &= (x^2+2xy)dy, \quad \text{integrando}\\
F(x,y) &= x^2\int dy + 2x\int ydy\\
F(x,y) &= x^2y+xy^2+g(x) \quad \text{ahora derivamos respecto a x}\\
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2xy+y^2+g'(x)\\
\text{Comparando} \quad 2xy++y^2 &= 2xy+y^2+g'(y)\\
g'(x)=0 &\rightarrow c=g(x)\\
F(x,y) &= x^2y+xy^2+c \therefore \textbf{S.G:} x^2y+xy^2=k
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.14** Resolver : $\left(\frac{-s^2}{r^2\sqrt{r^2+s^2}}\right)dr+\left(\frac{s}{r\sqrt{r^2+s^2}}\right)ds=0$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r}dr+\frac{\partial F}{\partial s}ds &= 0\\
\frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{s}{r\sqrt{r^2+s^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dF &= \frac{s}{r\sqrt{r^2+s^2}}\\
F(r,s) &= \frac{1}{r}\int\frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}\\
F(r,s) &= \frac{1}{r}\sqrt{r^2+s^2}+g(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2+s^2}} - \sqrt{r^2+s^2}}{r^2} + g'(r) \\
\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{-s^2}{r^2\sqrt{r^2+s^2}} + g'(r) \\
\frac{-s^2}{r^2\sqrt{r^2+s^2}} &= \frac{-s^2}{r^2\sqrt{r^2+s^2}} + g'(r) \\
g'(r) = 0 &\rightarrow g(r) = c \\
F(r,s) &= \frac{1}{r}\sqrt{r^2+s^2} + c
\end{aligned}$$

S.G: $\frac{1}{r}\sqrt{r^2+s^2} = k$ ∎

2.4.2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Inexactas

Si la E.D.O $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta entonces podemos convertirlo en una E.D.O exacta multiplicandole por un factor u, tal que

$u.M(x,y)dx + u.N(x,y)dy = 0$ es E.D.O.E .

Luego $\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= u_x; \frac{\partial M}{\partial y} = M_y \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= u_y; \frac{\partial N}{\partial y} = N_x \\
u_yM + uM_y &= u_xN + uN_x
\end{aligned}$$

Si $\quad u = u(x); u_y = 0 \rightarrow uM_y = u_xN + uN_x$

$$\begin{aligned}
u(M_y - N_x) &= u_xN \\
\frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{u_x}{u} \\
\frac{du}{u} &= \frac{M_y - N_x}{N} \\
\int \frac{du}{u} &= \int \frac{M_y - N_x}{N} dx \\
\ln(u) &= \int \frac{M_y - N_x}{N} dx \\
u(x) &= e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}
\end{aligned}$$

Análogamente para $u = u(y)$

$$u = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

■ **Ejemplo 2.15** Resolver: $(x^2y - x)dx - \frac{2x^3}{3}dy = 0$

Solución: $M = (x^2y - x)$; $M_y = x^2$;$N = -\frac{2x^3}{3}$; $N_x = -2x^2$ $M_y \neq N_x$, no es exacta.

$$\begin{aligned}
\frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{x^2 - (-2x^2)}{-\frac{2x^3}{3}} \\
&= \frac{3x^2}{-\frac{2x^3}{3}} \\
&= \frac{-9}{2x}
\end{aligned}$$

entonces el factor integrante $u = u(x)$ será:

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{\int \frac{-9}{2x} dx} \\
u(x) &= e^{\frac{-9}{2} \int \frac{dx}{x}} \\
u(x) &= e^{\frac{-9}{2} \ln(x)} = e^{\ln x^{\frac{-9}{2}}} \\
u(x) &= x^{\frac{-9}{2}}
\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos el factor integrante $u(x) = x^{\frac{-9}{2}}$ por la ecuación inicial:

$$\begin{aligned}
x^{-\frac{9}{2}}(x^2y - x)dx - \frac{2}{3}x^{-\frac{9}{2}}x^3 dy &= 0 \\
(x^{-\frac{5}{2}}y - x^{-\frac{7}{2}})dx - \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}dy &= 0
\end{aligned}$$

Ahora resolvemos como la ecuación diferencial exacta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy &= 0 \\
\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} \quad \rightarrow &\quad \int dF(x,y) = \int -\frac{2}{3}x^{\frac{-3}{2}}dy \\
F(x,y) &= -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}y + g(x) \\
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= x^{-\frac{5}{2}}y + g'(x) \\
x^{-\frac{5}{2}}y - x^{-\frac{7}{2}} &= x^{-\frac{5}{2}}y + g'(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(y) &= -x^{-\frac{7}{2}} \quad \text{integrando} \\ g(x) &= -\frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} \\ \text{Reemplazando} \quad F(x,y) &= -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}y + \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} + c \end{aligned}$$

S.G: $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}y - \frac{-2}{5}x^{\frac{-5}{2}} = k$ ■

2.5 Ecuaciones Diferenciales Lineales

Una ecuación diferencial lineal es aquella en la que después de realizar operaciones algebraicas resulta de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.3}$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior se utiliza un factor integrante.

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P(x)y &= Q(x) \\ \frac{dy + P(x)ydx}{dx} &= \frac{Q(x)dx}{dx} \\ [P(x)y - Q(x)]\,dx + 1dy &= 0 \\ M_y = P(x) \quad &; \quad N_x = 0 \\ \frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{P(x) - 0}{1} = P(x) \\ u &= e^{\int P(x)dx} \end{aligned}$$

Luego la E.D.O.L: $\quad e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)]\,dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} = e^{\int P(x)dx} \quad &\rightarrow \quad dF = e^{\int P(x)dx}dy \\ \int dF = \int e^{\int P(x)dx}dy \quad &\rightarrow \quad F(x,y) = e^{\int P(x)dx}\int dy \\ F(x,y) &= e^{\int P(x)dx}y + g(x) \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= e^{\int P(x)dx}P(x)y + g'(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^{\int P(x)dx}P(x)y - e^{\int P(x)dx}Q(x) &= e^{\int P(x)dx}P(x)y + g'(x) \\
g'(x) = -e^{\int P(x)dx}Q(x) &\rightarrow g(x) = \int -e^{\int P(x)dx}Q(x)dx \\
F(x,y) &= -e^{\int P(x)dx}y - \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{S.G:} \quad e^{\int P(x)dx}y - \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx &= c \\
ye^{\int P(x)dx} &= \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c
\end{aligned}
$$

Despejando y

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{e^{\int P(x)dx}}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right] \\
y &= e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right]
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 2.16** Resolver: $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{y}{x} = x$

Solución: Le damos la forma de una E.D.O.L:

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{x}\right)y = x$$

donde:

$$P(x) = \left(\frac{1}{x}\right); Q(x) = x$$

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int\left(\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int e^{\int\left(\frac{1}{x}\right)dx}xdx + c\right] \\
y &= e^{-\ln x}\left[\int e^{\ln x}xdx + c\right] = e^{\ln x^{-1}}\left[\int x^2dx + c\right] \\
y &= x^{-1}\left[\frac{x^3}{3} + c\right] = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3} + \frac{c}{x}
\end{aligned}
$$

■

■ **Ejemplo 2.17** Resolver: $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{3 + Pt}{2t^2}$

Solución:

Primero lo ordenamos:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{3}{2t^2}+\frac{Pt}{2t^2} \\ \frac{dP}{dt}-\left(\frac{1}{2t}\right)P &= \frac{3}{2t^2} \end{aligned}$$

De donde:

$$P(t)=-\frac{1}{2t};Q(t)=\frac{3}{2t^2}$$

$$\begin{aligned} P &= e^{-\int -\frac{1}{2t}dt}\left[\int e^{\int -\frac{1}{2t}dt}.\frac{3}{2t^2}dt+c\right] \\ P &= e^{\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}}\left[\int e^{\frac{-1}{2}\int \frac{dt}{t}}.\frac{3}{2t^2}dt+c\right] \\ P &= e^{\frac{1}{2}\ln t}\left[\int e^{\frac{-1}{2}\ln t}.\frac{3}{2t^2}dt+c\right] \\ P &= e^{\ln t^{\frac{1}{2}}}\left[\int e^{\ln t^{\frac{-1}{2}}}.\frac{3}{2t^2}dt+c\right] \\ P &= t^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}\int e^{t^{\frac{-1}{2}}}.\frac{dt}{t^2}dt+c\right]=t^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}\int e^{t^{\frac{-5}{2}}}dt+c\right] \\ P &= t^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{-2}{3}\right)t^{\frac{-3}{2}}+c\right]=c\sqrt{t}+\frac{1}{t} \end{aligned}$$

■

2.6 Ecuación Diferencial de Bernoulli

Una EDO de Bernoulli es aquella que después de manipularla algebraicamente resulta:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \tag{2.4}$$

Para resolver la EDO anterior se procede de la siguiente manera.

Multiplicamos la ecuación (2.4) por $(1-n)y^{-n}$

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x)$$

Sea $z=y^{1-n}\rightarrow\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}.\frac{dy}{dx}$

Obteniendo: $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$, la cual es una EDL.

■ **Ejemplo 2.18** $y(0)=1$, $\dfrac{dy}{dx}-y=-(x^2+x+1)y^2$

Solución:

Tenemos que: $P(x)=-1$; $Q(x)=-(x^2+x+1)$: $n=2$

Ahora multiplicamos por $(1-n)y^{1-n}=-y^{-1}$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}+y^{-1}=(x^2+x+1)$$

Hacemos $z=y^{-1}\rightarrow\dfrac{dz}{dx}=-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$

Luego $\dfrac{dz}{dx}+z=(x^2+x+1)$; $P(x)=1$; $Q(x)=x^2+x+1$

$\int P(x)dx=\int dx=x$

$$\begin{aligned}
z &= e^{-x}\left[\int e^x(x^2+x+1)dx+c\right]\\
z &= e^{-x}\left[(x^2+x+1)e^x-(2x+1)e^x+2e^x+c\right]\\
z &= x^2+x+1-(2x+1)+2+ce^x\\
z &= x^2-x+2+ce^x\rightarrow\frac{1}{y}=x^2-x+2+ce^x\\
y &= \frac{1}{x^2-x+2+ce^x}
\end{aligned}$$

Evaluamos la condición inicial $y(0)=1$ para obtener el valor de c

$$1=\frac{1}{2+c}\Longrightarrow c=-1$$

Reemplazando el valor de c :

$$y=\frac{1}{x^2-x+2-e^x}$$

■

Ejemplos Diversos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el procedimiento indicado:

■ **Ejemplo 2.19 — Variable Separable.** $y(-2)=-1$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+1}{2y}$

Solución:

Despejando tenemos:

$$2ydy=(2x+1)dx$$

Ahora integramos.

$$\begin{aligned} 2\int y dy &= 2\int x dx + \int dx \\ y^2 &= x^2 + x + c \end{aligned}$$

$(-1)^2 = (-2)^2 - 2 + c$; $c = -1 \Longrightarrow y^2 = x^2 + x - 1$ ■

■ **Ejemplo 2.20 — Variable.** $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$

Solución:

Despejamos para darle la forma de E.D.O.Variable:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P(1-P) \\ \frac{dP}{P(1-P)} &= dt \\ \int \frac{dP}{P(1-P)} &= \int dt \\ \int \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{1-P}\right) dp &= t + c \\ \ln(P) - \ln(1-P) &= t + c \\ \ln\left(\frac{P}{1-P}\right) &= t + c \\ \frac{P}{1-P} &= e^{t+c} = e^t.e^c = k.e^t \\ P &= ke^t - Pke^t = P(1+ke^t) = ke^t \\ P &= \frac{ke^t}{(1+ke^t)} \end{aligned}$$

$$P = \frac{\frac{ke^t}{ke^t}}{\frac{1}{ke^t} - \frac{ke^t}{ke^t}} = \frac{1}{1+ce^{-t}}$$

■

■ **Ejemplo 2.21 — E.D.Bernoulli.** $\dfrac{dP}{dt} - P = -P^2$

Solución:

Ordenando tenemos:

$$\frac{dP}{dt} + (-1)P = (-1)P^2 \to P = -1; Q = -1; n = 2$$

multiplicamos por $(1-n)P^{-n} = -P^{-2}$:

$$\begin{aligned}
-P^{-2}\frac{dP}{dt}+P^{-1} &= 1 \\
z=P^{-1} &\rightarrow \frac{dz}{dt}=-P^{-2}.\frac{dP}{dt} \\
\frac{dz}{dt}+z=1 &\rightarrow z=e^{\int -dt}\left[\int e^{\int dt}dt+c\right] \\
z &= e^{-t}\left[\int e^{t}dt+c\right] \\
z &= e^{-t}\left[e^{t}+c\right]=1+ce^{-t}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.22 — Homogénea.** $-(x+y)dy+ydx=0$

Solución:

$$-(x+y)dy+ydx=0; y=ux; dy=udx+xdu$$

$$\begin{aligned}
-(x+xu)(udx+xdu)+uxdx &= 0 \\
(-ux-u^2x+ux)dx-x(x+ux)du &= 0 \\
-u^2xdx-x(x+ux)du &= 0 \\
u^2dx+x(1+u)du &= 0 \\
\frac{dx}{x}+\frac{1+u}{u^2}du &= 0 \\
\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{1+u}{u^2}\right)du &= k \\
\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{u}{u^2}\right)du &= k
\end{aligned}$$

$$\ln x-\frac{1}{u}+\ln u=k \quad\rightarrow\quad \ln(x)-\frac{x}{y}+\ln(\frac{y}{x})=k$$

■

■ **Ejemplo 2.23 — Reducible a Exacta.** $ydx-(x-y)dy=0$

Solución:

$M=y\Longrightarrow M_y=1$; $N=-(x-y)\Longrightarrow N_x=-1$ Hallamos el factor para convertirla en exacta:

$$\int\left(\frac{N_x-M_y}{M}\right)dy=\int\left(\frac{-1-1}{M}\right)\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dy}{y}=-2\ln y$$

$u = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}$,multiplicamos u por la ecuación inicial:

$y^{-1}dx - (xy^{-2} - y^{-1})dy = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} = y^{-1} &\rightarrow dF = y^{-1}dx \\
F(x,y) &= y^{-1}x + g(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -y^{-2}x + g'(y) \\
-xy^{-2} - y^{-1} &= -y^{-2}x + g'(y) \\
-y^{-1} = g'(y) &\rightarrow g(y) = -\ln y \\
F(x,y) &= \frac{x}{y} - \ln y \quad \textbf{S.G:}\frac{x}{y} - \ln y = k
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.24 — Bernoulli.** $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} + \sqrt{x}$

Solución: $P = -\frac{1}{t}; Q = 1; n = \frac{1}{2}; (1-n) = \frac{1}{2}$

Multiplicamos por $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ y hacemos el cambio: $z = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \dfrac{dz}{dt} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dz}{dt} + -\frac{1}{2t}.z = \frac{1}{2} \rightarrow -\int \frac{dt}{2t} = -\frac{1}{2}\ln t = \ln t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
z &= e^{-\int \frac{-dt}{2t}}\left[\int e^{\int \frac{-dt}{2t}} dt + c\right] \\
z &= e^{\ln t^{\frac{1}{2}}}\left[\int e^{\ln t^{\frac{-1}{2}}} dt + c\right] \\
z &= t^{\frac{1}{2}}\left[\int t^{\frac{-1}{2}} dt + c\right] \\
z &= t^{\frac{1}{2}}\left[2.t^{\frac{1}{2}} + c\right] \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2t + c\sqrt{t} \\
x &= (2t + c\sqrt{t})^2
\end{aligned}$$

■

Actividad N° 02

Ejercicio 2.1 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $e^y\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=1$

2) $tg(x)Sen^2(x)dx+Cos^2(x)ctg(y)dy=0$

3) $(x^2y-x^2y-1)dx=(-xy-2x+3y+6)dy$

4) $3e^x tg(y)dx+(1-e^x)Sec^2(y)=0$

5) $(4x^2+xy-3y^2)dx=(5x^2-2xy-y^2)dy$

6) $xcsc(\frac{y}{x}-y)dx+xdy=0$

7) $2(2x^2+y^2)dx-xydy=0$

8) $ydx=(x+\sqrt{y^2-x^2})dy$

9) $\sqrt{1+x^3}\frac{dy}{dx}=x^2y+x^2$

10) $e^{2x-y}dx+e^{y-2x}dy=0$

11) $e^{x+y}Sen(x)dx+(2y+1)e^{-y^2}=0$

12) $(1-y)e^y\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{xlnx}=0$

13) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\phi(\frac{y}{x})}{\phi'(\frac{y}{x})}$

14) $dy=(\frac{y}{x}-csc^2(\frac{y}{x}))dx$

15) $x^2y'=4x^2+7xy+2y^2$

16) $\frac{dy}{dx}=\frac{y(2x^3+y^3)}{x(2x^3-3y^3)}$

3. Ecuaciones diferenciales de orden superior

3.1 Ecuación Diferencial de Orden Superior

En *II* por la ley de Hooke:

$$\begin{aligned} F &= ks \\ mg &= ks \\ mg - ks &= 0 \end{aligned}$$

En *III*: $F = ma$

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= mg - k(s+x) \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= mg - ks - kx \end{aligned}$$

Como $mg - ks = 0$, tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (3.1)$$

Si existe un amortiguador: $\beta\frac{dx}{dt}$, en la ecuación(3.1)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3.2)$$

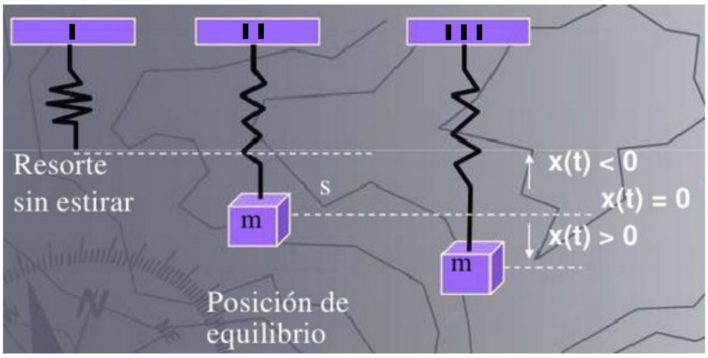


Figura 3.1: Sistema Resorte Masa

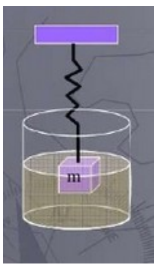


Figura 3.2: Sistema Resorte Masa con Amortiguador

La modelación anterior nos inspira a desarrollar una técnica de solución para una EDO de orden superior. Recordemos que una ecuación diferencial de orden superior con coeficientes constantes tiene la siguiente forma:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=F(x)$$

3.2 EDOLH CON COEFICIENTES CONTANTES DE ORDEN n

Cualquiera de las ED son homogéneas.

1. $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+\beta\dfrac{dx}{dt}+kx=0$
2. $5\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+8y=0$
3. $2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$
4. $m\dfrac{d^3x}{dt^3}-2\dfrac{dx}{dt}+3x=0$
5. $3y'''-4y''+5y'=0$

Para resolver cualquiera de las E.D utilizaremos el método recursivo es decir empezaremos con una E.D de 1^{er} orden y luego generalizaremos.

$$\begin{aligned} a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0\rightarrow a_1\frac{dy}{dx} &= -a_0y \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{a_0}{a_1}dx \\ \int\frac{dy}{y}=-\frac{a_0}{a_1}\int dx \end{aligned}$$

$\ln y=-\dfrac{a_0}{a_1}x\Longrightarrow ce^{-\frac{a_0}{a_1}x}$

Dado el caso anterior, entonces:

$a_2\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1\dfrac{dy}{dx}+a_0y=0$

Tendrá solución $y=e^{rx}$

Luego $\dfrac{dy}{dx}=re^{rx};\dfrac{d^2y}{dx^2}=r^2e^{rx}$

Por lo tanto: $a_2r^2e^{rx}+a_1re^{rx}+a_0e^{rx}=0$

$e^{rx}(a_2r^2+a_1r+a_0)=0\Longrightarrow e^{rx}=0\vee a_2r^2+a_1r+a_0=0\Longrightarrow F\ \vee a_2r^2+a_1r+a_0=0$

$\therefore a_2r^2+a_1r+a_0=0$

La ecuación anterior tendrá dos raíces r_1 y r_2 dado que es una ecuación cuadrática; luego la solución general de la E,D de orden 2 será: $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$

Para una ecuación de la forma:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0$$

Le asociaremos:

$P(x)=a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_2r^2+a_1r+a_0$

Al cual llamaremos polinomio característico, éste nos permitirá hallar la solución dependiendo de las características de sus raíces.

Caso 1

Si después de $P(r)=0$ las raíces son reales y distintas y:

$$r_1<r_2<r_3<\cdots<r_n$$

La solución general será:

$$y_g=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+C_3e^{r_3x}+\cdots+C_ne^{r_nx}$$

■ **Ejemplo 3.1** Resolver : $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$

Solución

$r^2-5r+6=0$

$r^2-5r+6=(r-3)(r-2)=0\longrightarrow r=3;r=2\longrightarrow y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ ■

■ **Ejemplo 3.2** Resolver : $x'''-x''-2x'=0$

Solución

$r^3-r^2-2r=0\rightarrow r(r^2-r-2)=0\rightarrow r(r-2)(r+1)=0$

$r=0;r=2;r=-1\longrightarrow x=c_1e^{0t}+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}\rightarrow x=c_1+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}$ ■

Caso 2

Si después de $P(r)=0$ las raíces son reales, con algunas que se repiten k:

$$r_1=r_2=r_3=\cdots=r_k=r$$

La solución general será:

$$y_g=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}+C_3x^2e^{rx}+\cdots+C_kx^{k-1}e^{rx}+C_{k+1}e^{r_{k+1}x}+C_ne^{r_nx}$$

■ **Ejemplo 3.3** Resolver : $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

Solución

$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0 \to (r-2)(r-2)(r-2) = 0 \to (r-2)^3 = 0$

$r = 2$, (multiplicidad 3.) $\to y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x}$

■

Caso 3

Si después de $P(r) = 0$ alguna de las raíces son complejas y las demás son reales y distintas:

$r_1 = \alpha_1 + \beta_1 i \quad \wedge \quad r_2 = \alpha_1 - \beta_1 i$

$r_3 = \alpha_2 + \beta_2 i \quad \wedge \quad r_4 = \alpha_2 - \beta_2 i$

La solución general será:

$$y_g = e^{\alpha_1}x\,[C_1\cos(\beta_1 x) + C_2\sin(\beta_1 x)] + e^{\alpha_2}x\,[C_3\cos(\beta_2 x) + C_4\sin(\beta_2 x)] + C_5x^2e^{r_5x} + \cdots + C_ne^{r_nx}$$

■ **Ejemplo 3.4** Resolver : $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$

Solución

$r^2 - 3r + 4 = 0 \to a = 1; b = -3; c = 4 \to r = \dfrac{3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(4)}}{2(1)}$

$r = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2}$

$r = \dfrac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} \to r = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2}$

$y = e^{\frac{3}{2}t}\left[c_1\cos(\frac{\sqrt{7}t}{2}) + c_2\sin(\frac{\sqrt{7}t}{2})\right]$ ■

Ejemplos Diversos

A continuación se resolverán algunos ejemplos para consolidar la teoría expuesta.

■ **Ejemplo 3.5** P.V.I :

$$\begin{cases} 3y''' + 5y'' + y' - y = 0 \\ y(2) = 0; y(2) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = -1 \end{cases}$$

Solución

$3r^3 + 5r^2 + r - 1 = 0 \to (r+1)(r+1)(3r-1) = 0 \to (r+1)^2(3r-1) = 0$

$r = 1$ (multiplicidad 2); $r = \dfrac{1}{3}$

$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{\frac{1}{3}x}$

$0 = c_1 + c_3;\ c_3 = -c_1$

$y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3e^{\frac{1}{3}x}$

$y' = c_2^{-x} - (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{3}c_3 e^{\frac{1}{3}x}$

$1 = c_2 - c_1 + \frac{1}{3}c_3$

$3 = 3c_2 - 3c_1 + c_3$

$3 = -3c_1 + 3c_2 + c_3$

$y' = (c_2 - c_1 - c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{3}c_3 e^{\frac{1}{3}x}$

$y'' = -c_2 e^{-x} - (c_2 - c_1 - c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{9}c_3 e^{\frac{1}{3}x}$

$-1 = -c_2 - c_2 + c_1 + \frac{1}{9}c_3$

$-9 = -9c_1 - 18c_2 + c_3$

$$\begin{cases} -4c_1 + 3c_2 = 3 \\ 8c_1 - 18c_2 = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8c_1 + 6c_2 = 6 \\ 8c_1 - 18c_2 = -9 \end{cases}$$

$-12c_2 = -3 \rightarrow c_2 = -\dfrac{1}{4}$

$-4c_1 + 3c_2 = 3$

$-4c_1 + 3\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \rightarrow c_1 = \frac{-9}{16} \quad ;c_3 = \frac{9}{16}$

$y = \frac{-9}{16}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} + \frac{9}{16}e^{\frac{1}{3}x}$ ■

■ **Ejemplo 3.6** Resolver : $x^{iv} - 4x''' + 8xy'' - 16x' + 16x = 0;\ x = x(t)$

Solución

$r^4 - 4r^3 + 3r^2 - 16r + 16 = 0 \rightarrow (r-2)(r-2)(r^2+4) = 0 \rightarrow (r-2)^2(r^2+4) = 0$

$r_1 = 2$, (multiplicidad 2.); $r_2 = \pm 2i \rightarrow x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + e^{0t}\left[c_3\cos(2t) + c_4\sin(2t)\right]$

$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \left[c_3\cos(2t) + c_4\sin(2t)\right]$ ■

■ **Ejemplo 3.7** Resolver : $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0;\ y = y(x)$

Solución

$r^3 - 5r^2 = 0 \Longrightarrow r^2(r-5) = 0;\ r = 0;$ (multiplicidad 2); $r = 5$

$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{5x}$

$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{5x}$ ■

3.3 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Definición 3.3.1 Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones diferenciales que están ligadas por sus derivadas y las variables dependientes, su representación matemática es:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t;x_1;x_2;\cdots;x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t;x_1;x_2;\cdots;x_n) \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t;x_1;x_2;\cdots;x_n) \end{cases}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales podemos utilizar 2 métodos; el primero consiste en reemplazar adecuadamente en las demás y formar una ecuación diferencial de orden superior y el segundo método consiste en usar elementos de álgebra lineal.

Para la mejor comprensión utilizaremos un ejemplo concreto.

■ **Ejemplo 3.8** Resolver:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \cdots (1) \\ y' = 3x + 4y \cdots (2) \end{cases}$$

Solución :

Primer Método

En (1) $x'' = 2x' + y' \longrightarrow x'' = 2x' + 3x + 4y$

$x'' = 2x' + 3x + 4(x' - x)$

$x'' - 6x' + 5x = 0$

$r^2 - 6r + 5 = 0 \longrightarrow (r - 65)(r - 1) = 0 \longrightarrow r = 1;\ r = 5$

$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t};$ en (1)

$c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} = 2\left[c_1 e^t + c_2 e^{5t}\right] + y \longrightarrow y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}$

Solución: $\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t} \end{cases}$

Segundo Método

$$\begin{cases} x' = 2x + y \cdots (1) \\ y' = 3x + 4y \cdots (2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \rightarrow A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ 3 & 4-r \end{vmatrix} = 0$$

$(2 - r)(4 - r) - 3 = 0$

$8 - 2r - 4r + r^2 - 3 = 0$

$r^2 + 6r - 5 = 0 \longrightarrow (r - 5)(r - 1) = 0 \longrightarrow r = 1;\ r = 5$

$$* \text{ Si } \quad r = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \alpha + \beta = 0 \longrightarrow \beta = -\alpha \longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$* \text{ Si } \quad r=5 \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -3\alpha+\beta=0 \longrightarrow \beta=3\alpha \longrightarrow v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{Solución}: \begin{cases} x = c_1e^t + c_2e^{5t} \\ y = -c_1e^t + 3c_2e^{5t} \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 3.9** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x+y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x-2y \\ t=0;\ x=1;\ y=-1 \end{cases}$

Solución :

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-r & 1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = 0$$

$(-4-r)(-2-r)-3=0$

$8+4r+2r+r^2-3=0$

$r^2+6r+5=0 \longrightarrow (r+5)(r+1)=0 \longrightarrow r=-1;\ r=-5$

$x(t) = -c_1e^{-t}+3c_2e^{-5t}$

$$* \text{ Si } \quad r=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -3\alpha+\beta=0 \longrightarrow \beta=3\alpha \longrightarrow v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$* \text{ Si } \quad r=-5 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \alpha+\beta=0 \longrightarrow \beta=-\alpha \longrightarrow v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = c_1e^{-t} + c_2e^{-5t} \\ y = 3c_1e^{-t} - c_2e^{5t} \end{cases}$$

$x(t) = c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}$

$1 = c_1+c_2$

$y(t) = 3c_1e^{-t}-c_2e^{5t}$

$-1 = 3c_1-c_2$

$1 = c_1+c_2\ -1 = 3c_1-c_2 \longrightarrow 0=4c_1 \longrightarrow c_1=0;\ c_2=1$

$$\therefore \begin{cases} x(t) = e^{-5t} \\ y(t) = -e^{5t} \end{cases}$$

■

3.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Su invención se debe al matemático Francés Simón Pierre Laplace y se crea con la finalidad de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

$m\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$, y basicamnete cuando $F(t)$ tiene más de una regla de correspondencia.

$$F(x)=\begin{cases} x+1;\ x\in[0,1] \\ 1-x^2;\ x\in\langle 1,5] \end{cases}$$

Definición 3.4.1 Sea $F(t):[0,+\infty\rangle\to\mathbb{R}$; una función continua y de orden exponencial, la transformada de Laplace de la función F se denota y se define de la siguiente manera:

$$L\{F(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t)dt$$

■ **Ejemplo 3.10** $L\{1\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\cdot 1dt$

Solución:

$$L\{1\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$L\{1\}=\left(\frac{-1}{se^{st}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$L\{1\}=\frac{-1}{se^{\infty}}-\frac{-1}{se^{0}}$$
$$L\{1\}=0+\frac{1}{s}$$
$$L\{1\}=\frac{1}{s};\ L\{2\}=\frac{2}{s};\ L\{k\}=\frac{k}{s}$$

■

3.4.1 Transformada de Laplace de una Potencia

La definimos como: $L\{t^n\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\cdot t^n dt$, para deducir la fórmula veamos los siguientes ejemplos.

■ **Ejemplo 3.11** $L\{t\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\cdot tdt$

Solución :

$$L\{t\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}tdt$$
$$L\{t\}=\left(\frac{te^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$L\{t\}=0-0-(0-\tfrac{1}{s^2})$$
$$L\{t\}=\frac{1}{s^2}$$

■

■ **Ejemplo 3.12** $L\{t^2\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\cdot t^2dt$

Solución:

$$\begin{array}{ll} t^2 & e^{-st} \\ 2t & \dfrac{e^{-st}}{-s} \\ 2 & \dfrac{e^{-st}}{s^2} \\ 0 & \dfrac{e^{-st}}{-s^3} \end{array}$$

$$L\{t^2\} = \left(\frac{-t^2e^{-st}}{s} - \frac{2te^{-st}}{s^2} - \frac{-e^{-st}}{s^3} \right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$L\{t^2\} = (0-0-(0-\tfrac{2}{s^3})) = \frac{2}{s^3}$$

■

■ **Ejemplo 3.13** $L\{t^3\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t^3 dt$

Solución:

$$\begin{array}{ll} t^3 & e^{-st} \\ 3t^2 & \dfrac{e^{-st}}{-s} \\ 6\mathrm{t} & \dfrac{e^{-st}}{s^2} \\ 6 & \dfrac{e^{-st}}{-s^3} \\ 0 & \dfrac{e^{-st}}{s^4} \end{array}$$

$$L\{t^3\} = \left(\frac{-t^3e^{-st}}{s} - \frac{3t^2e^{-st}}{s^2} - 6t\frac{-e^{-st}}{s^3} - 6\frac{e^{-st}}{s^4} \right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$L\{t^3\} = 0-(0-\tfrac{6}{s^4})$$

$$L\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

■

Resumiendo tenemos:

$$\begin{aligned} L\{t^1\} &= \frac{1}{s^2} = \frac{1!}{s^{1+1}} \\ L\{t^2\} &= \frac{2}{s^3} = \frac{2!}{s^{2+1}} \\ L\{t^3\} &= \frac{6}{s^4} = \frac{3!}{s^{3+1}} \end{aligned}$$

Entonces: $L\{t^n\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t^n dt = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

3.4.2 Transformada de Laplace de $\sin(t)$ y $cos(t)$

$L\{\sin(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot \sin(t)dt$ Integrando por partes: $u = e^{-st} \longrightarrow du = -se^{-st}dt$

$dv = \sin(t)dt \longrightarrow v = \int \sin(t)dt \longrightarrow v = -\cos(t)$

$L\{\sin(t)\} = (-e^{-st}\cos(t))|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot (-\cos(t))(-s)dtd$

$$L\{\sin(t)\} = 0 - (-1) - s\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(t)dtd$$

$$L\{\sin(t)\} = 1 - s\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(t)dtd$$

Como podemos apreciar aún tenemos una integral por resolver, para ello utilizaremos integración por partes: $u = e^{-st} \longrightarrow du = -se^{-st}dt$

$$dv = \cos(t)dt \longrightarrow v = \int \cos(t)dt \longrightarrow v = \sin(t)$$

$$L\{\sin(t)\} = 1 - s\left[(e^{-st}\sin(t))|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(t)sdt\right]$$

$$L\{\sin(t)\} = 1 - s\left[0 - 0 + s\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(t)dt\right]$$

$$L\{\sin(t)\} = 1 - s^2\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(t)dt$$

Pero $L\{\sin(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(t)dt$, entonces reemplazando y despejando convenientemente:

$$\begin{aligned}
L\{\sin(t)\} &= 1 - s^2L\{\sin(t)\} \\
L\{\sin(t)\} + s^2L\{\sin(t)\} &= 1 \\
L\{\sin(t)\}(1+s^2) &= 1 \\
\therefore L\{\sin(t)\} &= \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

De forma análoga tenemos: $L\{\cos(t)\} = \dfrac{s}{s^2+1}$.**Por Demostrar**

N 3.1 Por los cálculos anteriores podemos apreciar que la transformada de Laplace de una función F depende de s por aquella razón escribiremos.

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot F(t)dt = F(s)$$

Teorema 3.4.1 — Multiplicación por un escalar. Sea $F : [0,\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y orden exponencial talque: $L\{F(t)\} = F(s)$, entonces se cumple que $L\{F(at)\} = \dfrac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

Demostración Se sabe que $L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot F(t)dt = F(s)$

Entonces $L\{F(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot F(at)dt$

Sea $at = u \Rightarrow adt = du \Rightarrow dt = \dfrac{du}{a}$

$$\begin{aligned} L\{F(at)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-s(\frac{u}{a})} F(u) \frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{s}{a})u} F(u) du \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{s}{a})t} F(t) dt \\ L\{F(at)\} &= \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}) \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 3.14** Calcular $L\{\sin(2t)\}$

Solución:

Sabemos: $L\{\sin(t)\} = \dfrac{1}{s^2+1}$

Aplicando el teorema de la multiplicación por un escalar:

$L\{\sin(2t)\} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(\frac{s}{2})^2+1}$

$$L\{\sin(2t)\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{s^2}{4}+1}$$

$$L\{\sin(2t)\} = \frac{1}{2} \frac{4}{s^2+4}$$

$$L\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}$$ ■

N 3.2

De forma general tenemos:

$$\begin{aligned} L\{\sin(at)\} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(\frac{s}{a})^2+1} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{a^2}+1} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2+a^2}{a^2}} \end{aligned}$$

Entonces

$$L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2} \tag{3.3}$$

■ **Ejemplo 3.15** $L\{\sin(4t)\} = \dfrac{4}{s^2+4^2} = \dfrac{4}{s^2+16}$ ■

■ **Ejemplo 3.16** $L\{\cos(at)\}$

Solución:

Sabemos $L\{\cos(t)\} = \dfrac{s}{s^2+1}$

Ahora utilizando el teorema (3.4.1), tenemos:

$$\begin{aligned}
L\{\cos(at)\} &= \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{s}{a}}{(\frac{s}{a})^2+1}\\
&= \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{s}{a}}{\frac{s^2}{a^2}+1}\\
&= \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{s}{a}}{\frac{s^2+a^2}{a^2}}
\end{aligned}$$

De donde:

$$L\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2} \tag{3.4}$$

■

■ **Ejemplo 3.17** $L\{\cos(3t)\} = \dfrac{s}{s^2+9}$ ■

Teorema 3.4.2 — Teorema de la forma e^{-bt}. Sea $F:[0,\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y orden exponencial talque: $L\{F(t)\} = F(s)$, entonces se cumple que $L\{e^{at}\cdot F(t)\} = F(s-a)$

Demostración

Se sabe que

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot F(t)dt = F(s)$$

$$\Longrightarrow L\{e^{at}\cdot F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot e^{at}\cdot F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st+at}\cdot F(t)dt$$

$$L\{e^{at}\cdot F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\cdot F(t)dt \Rightarrow L\{e^{at}\cdot F(t)\} = F(s-a)$$

■ **Ejemplo 3.18** Calcular: $L\{e^{2t}\cdot\sin(t)\}$

Solución:

$$L\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{e^{2t}\cdot\sin(t)\} = \frac{1}{(s-2)^2+1} = \frac{1}{s^2-4s+5}$$ ■

■ **Ejemplo 3.19** Calcular: $L\{e^{-3t}\}$

Solución:

$L\{e^{-3t}\cdot 1\} =?$

$$L\{1\} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = -3 \Rightarrow L\{e^{-3t}\cdot 1\} = \frac{1}{s+3}$$ ■

■ **Ejemplo 3.20** Calcular: $L\{e^{4t}\cdot t^2\}$

Solución:

$L\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow L\{e^{4t} \cdot t^2\} = \dfrac{2}{(s-4)^3}$ ■

Teorema 3.4.3 — Teorema de la multiplicación por t. Sea $F : [0, \infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y orden exponencial talque: $L\{F(t)\} = F(s)$, entonces se cumple que $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$

■ **Ejemplo 3.21** Calcular: $L\{t \cdot \sin(2t)\}$

Solución:

$L\{\sin(2t)\} = \dfrac{2}{s^2+4}$

$$L\{t \cdot \sin(2t)\} = (-1)^1 \frac{d^1}{ds^1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{-2'(s^2+4) - 2(s^2+4)'}{(s^2+4)^2} = -\frac{-2(2s)}{(s^2+4)^2}$$

$$L\{t \cdot \sin(2t)\} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$ ■

3.4.3 Transformada de Laplace de la Derivada

El objetivo principal que se pretende con la transformada de Laplace consiste en la aplicación de una ecuación diferencial con condiciones iniciales, por aquella razón es necesario conocer la Transformada de Laplace.

Sea $F : [0, \infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y orden exponencial talque: $L\{F(t)\} = F(s)$, entonces se cumple que $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0)$

Demostración

Se sabe que

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot F(t)dt = F(s)$$

Entonces

$L\{F'(t)\} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot F'(t)dt$

Utilizando la integración por partes: $u =^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}dt$

$dv = F'(t)dt \Rightarrow v = F(t)$

$$\begin{aligned} L\{F'(t)\} &= \left[e^{-st}F(t)\right]\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot F(t)dt \\ L\{F'(t)\} &= 0 - F(0) + sL\{F(t)\} \\ L\{F'(t)\} &= sL\{F(t)\} - F(0) \\ L\{F'(t)\} &= sF(s) - F(0) \end{aligned}$$

De igual manera podemos calcular la Transformada de Laplace de la Segunda Derivada:

$$\begin{aligned}
L\{F''(t)\} &= L\{F'(t)\}' \\
&= L\{G'(t)\} \quad \text{siendo} \quad G(t) = F' \\
&= sL\{G(t)\} - G(0) \\
&= sL\{F'(t)\} - F'(0) \\
&= s\left[sL\{F(t)\} - F(0)\right] - F'(0)
\end{aligned}$$

$\therefore L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0) - F'(0)$

3.5 Transformada Inversa de Laplace

Veamos unos ejemplos directos

1. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
2. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
3. $L^{-1}\left\{\frac{5}{s^3}\right\} = 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = \frac{5}{2}t^2$
4. $L^{-1}\left\{\frac{6}{s^5}\right\} = 6L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{6}{4!}L^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{4}t^4$
5. $L^{-1}\left\{\frac{2}{s^6}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\} = \frac{2}{5!}L^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\} = \frac{1}{60}t^5$

   de forma genérica tenemos: $L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$
6. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}$

■ **Ejemplo 3.22** $L^{-1}\left\{\frac{3}{(s-4)^3}\right\}$

Solución:

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left\{\frac{3}{s^3}\right\} &= \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = \frac{3}{2}t^2 \\
L^{-1}\left\{\frac{3}{(s-4)^3}\right\} &= \frac{3}{2}t^2 e^{4t}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 3.23** $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{(s+1)^4}\right\}$

Solución:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{5}{s^4}\right\} &= \frac{5}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = \frac{5}{6}t^3 \\ L^{-1}\left\{\frac{5}{(s+1)^4}\right\} &= \frac{5}{6}t^2e^{-t} \end{aligned}$$

$\therefore L^{-1}\left\{\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = t^n e^{at}$ ■

■ **Ejemplo 3.24** $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin(at)$

Solución:

$L^{-1}\left\{\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}\right\} = e^{bt}\sin(at)$ ■

■ **Ejemplo 3.25** $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{(s-2)^2+5^2}\right\} = e^{2t}\sin(5t)$ ■

■ **Ejemplo 3.26** $L^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^2+8s+25}\right\}$

Solución:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+8s+25}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+8s+16+9}\right\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+4)^2+3^2}\right\} \\ &= \frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+4)^2+3^2}\right\} \\ &= \frac{4}{3}e^{-4t}\sin(3t) \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 3.27** $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+s+14}\right\}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+s+14}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+9+5}\right\}\\
&= L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+\sqrt{5}^2}\right\}\\
&= L^{-1}\left\{\frac{s+3-3}{(s+3)^2+\sqrt{5}^2}\right\}\\
&= L^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s+3)^2+\sqrt{5}^2}-\frac{3}{(s+3)^2+\sqrt{5}^2}\right\}\\
&= L^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s+3)^2+\sqrt{5}^2}\right\}-\frac{3}{\sqrt{5}}L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{(s+3)^2+\sqrt{5}^2}\right\}\\
&= e^{-3t}\cos(\sqrt{5}t)-\frac{3}{\sqrt{5}}e^{-3t}\sin(\sqrt{5}t)
\end{aligned}
$$

■

■ **Ejemplo 3.28** Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=4e^{-2t}\\
x(0)=-1;\ x'(0)=4
\end{cases}
$$

Solución:

Aplicando transformada de laplace a todos los términos de la ecuación:

$$
\begin{aligned}
L\{x''(t)-4x'(t)+4x(t)\} &= 4L\{e^{-2t}\}\\
L\{x''(t)\}-4L\{x'(t)\}+4L\{x(t)\} &= \frac{4}{s+2}\\
s^2L\{x(t)\}-sx(0)-x'(0)-4\left[sL\{x(t)\}-x(0)\right]+4L\{x(t)\} &= \frac{4}{s+2}
\end{aligned}
$$

Reemplazando los valores de la condición inicial dada, tenemos:

$$
\begin{aligned}
L\{x(t)\}(s^2+4s+4)+s-4+4 &= \frac{4}{s+2}\\
L\{x(t)\}(s+2)^2 &= \frac{4}{s+2}-s\\
L\{x(t)\} &= \frac{4}{(s+2)^3}-\frac{s}{(s+2)^2}
\end{aligned}
$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de laplace

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^3} - \frac{s}{(s+2)^2}\right\} \\ x(t) &= 2L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2}\right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Donde:
$L^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s+2)^3}\right\} = t^2e^{-2t}$ por teorema (3.4.2)
Para resolver $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+2)^2}\right\}$ utilizaremos fracciones parciales:
$\dfrac{s}{(s+2)^2} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{(s+2)^2}$

$s = -2 \Rightarrow B = -2$

$s = 0 \Rightarrow A = 1$

Entonces reemplazando en (3.5)tenemos: $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+2)^2}\right\} = \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{2}{(s+2)^2} = e^{-2t} - 2te^{-3t}$

$\therefore x(t) = 2t^2e^{-2t} - e^{-2t} + 2te^{-3t}$ ■

■ **Ejemplo 3.29** $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 6x = t \\ x(0) = 0;\ x'(0) = 0 \end{cases}$

Solución:

Aplicando transformada de laplace y agrupnado convenientemente, tenemos:

$$\begin{aligned} L\{x''(t) - 5x'(t) + 6x(t)\} &= L\{t\} \\ L\{x''(t)\} - 5L\{x'(t)\} + 6L\{x(t)\} &= \frac{1}{s^2} \\ s^2L\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) - 5\left[sL\{x(t)\} - x(0)\right] + 6L\{x(t)\} &= \frac{1}{s^2} \\ s^2L\{x(t)\} - 5sL\{x(t)\} + 6L\{x(t)\} &= \frac{1}{s^2} \\ L\{x(t)\}(s^2 - 5s + 6) &= \frac{1}{s^2} \\ L\{x(t)\} &= \frac{1}{s^2(s^2 - 5s + 6)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora para encontrar $x(t)$, empleamos transformada inversa de laplace en la ecuación (3.6):
$x(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2 - 5s + 6)}\right\}$ nos interesa separar la expresión en varias fracciones, para ello recurriremos a las fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2(s-2)(s-3)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-2}+\frac{D}{s-3}\\
\frac{1}{s^2(s-2)(s-3)} &= \frac{As(s-2)(s-3)+B(s-2)(s-3)+Cs^2(s-3)+Ds^2(s-3)}{s^2(s-2)(s-3)}
\end{aligned}$$

$*$ Si $s=0 \Rightarrow 6B=1 \Longrightarrow B=\dfrac{1}{6}$

$*$ Si $s=2 \Rightarrow -4C=1 \Longrightarrow C=\dfrac{-1}{4}$

$*$ Si $s=3 \Rightarrow 9D=1 \Longrightarrow D=\dfrac{1}{9}$

$*$ Si $s=1 \Rightarrow 2A-2(\frac{1}{6})-2(\frac{1}{4})-\dfrac{1}{9}=1$

$72A+26=36 \Rightarrow A=\dfrac{5}{36}$

Entonces $x(t)$ queda:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{5}{36}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{9}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}\\
x(t) &= \frac{5}{36}+\frac{t}{6}-\frac{e^{2t}}{4}+\frac{e^{3t}}{9}
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 3.30** $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+x=6\cos(2t)\\ x(0)=3;\ x'(0)=1 \end{cases}$

Solución:

Aplicamos el mismo procedimiento que el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
L\{x''(t)+x(t)\} &= 6L\{\cos(2t)\}\\
s^2L\{x(t)\}-sx(0)-x'(0)+L\{x(t)\} &= \frac{6}{s^2+4}\\
L\{x(t)\}(s^2+1) &= \frac{6}{s^2+4}+3s+1\\
L\{x(t)\} &= \frac{6}{(s^2+1)(s^2+4)}+\frac{3s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Sacamos la transformada inversa para obtener $x(t)$

$x(t)=L^{-1}\left\{\dfrac{6}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}+L^{-1}\left\{\dfrac{3s}{s^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}$

$$\begin{aligned}
\frac{6}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\\
\frac{6}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}
\end{aligned}$$

* $s = 0 \Rightarrow 4B + D = 0 \cdots (1)$
* $s = 1 \Rightarrow 5A + 5B + 2C + 2D = 6 \cdots (2)$
* $s = -1 \Rightarrow -5A + 5B - 2C + 2D = -6 \cdots (3)$
* $s = 2 \Rightarrow 16A + 8B + 10C + 5D = 12 \cdots (4)$

Resolviendo se tiene: $B = 0$; $D = 0$; $A = 2$; $C = -2$

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left\{\frac{6}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+4}\right\} \\
&= e^{-2t} - 2te^{-3t} \\
&= 2\cos(t) - 2\cos(2t)
\end{aligned}
$$

$\therefore x(t) = 5\cos(t) - 2\cos(2t) + \sin(t)$ ∎

Actividad N° 03

Ejercicio 3.1 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior:

1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

2) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

3)$y'' - y' = 0$

4) $2y'' + 2y' + 2y = 0$

5)$y'' + 10y' + 25y = 0$

6) $y'' + k^2 y = 0$

7) $y''' - y'' - 3y' - y = 0$

8) $y''' - y = 0$

9) $y''' + y'' + y' + y = 0$

10) $y'' - y = 0$

11) $6y'' + 2y' - y = 0$

12) $y''' - y'' + y' - y = 0$

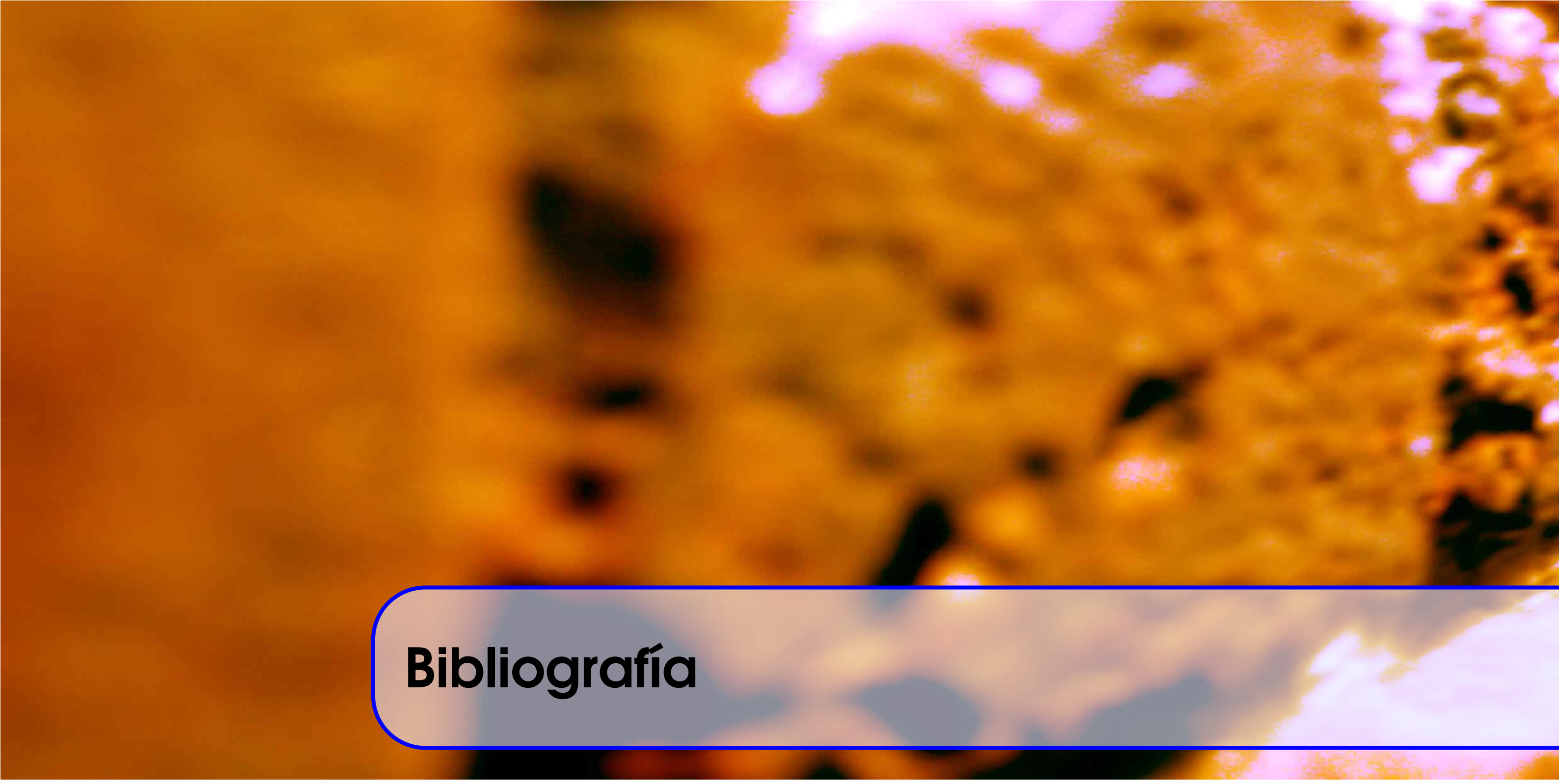
Ejercicio 3.2 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior utilizando transformada de laplace:

1) $\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + 12e^{-t} \\ y'(0) = -1, y(0) = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 125t^2 \\ y'(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 9t \\ y'(0) = 7, y(0) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = 18t \\ y'(\frac{1}{2}) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$



Bibliografía

Libros

[Smi12] John Smith. *Book title*. 1.ª edición. Volumen 3. 2. City: Publisher, ene. de 2012, páginas 123-200.

Artículos

[Smi13] James Smith. “Article title”. En: 14.6 (mar. de 2013), páginas 1-8.